Načelo vključitev in izključitev (NVI)

Izrek. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podmnožice končne množice A. Za $k = 0, 1, \ldots, n$ označimo:

N_k = št. elementov A, ki pripadajo natanko k množicam A_i,
S_k = vsota moči vseh presekov po k množic A_i ($S_0 = |A|$).

Potem velja:

a) S_k = vsota $_{k <= j <= n}$ (j nad k) N_j,
b) N_k = vsota $_{k <= j <= n}$ $(-1)^{j+k}$(j nad k) S_j.

Posledica *(načelo vključitev in izključitev, NVI).* Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podmnožice končne množice A. Označimo z A_i' komplement A_i v A. Potem je:

a) | presek $_{1 <= i <= n}$ A_i'| = vsota $_{0 <= k <= n}$ $(-1)^k$ S_k,
b) | unija $_{1 <= i <= n}$ A_i | = vsota $_{1 <= k <= n}$ $(-1)^{k+1}$ S_k.

Zgledi uporabe NVI:

1. Število permutacij iz simetrične grupe S_n brez negibne točke je enako
$n!$ vsota $_{0 <= j <= n}$ $(-1)^j/j!$.

2. Število permutacij iz S_n z natanko k negibnimi točkami je enako
$n!/k!$ vsota $_{0 <= j <= n-k}$ $(-1)^j/j!$.

3. Povprečno število negibnih točk enakomerno naključno izbrane permutacije iz S_n je enako 1.

Bijekcije brez prepovedanih parov

Definicija. Naj bo D šahovska deska, ki ji lahko nekaj polj manjka, in $t_k(D)$ število postavitev k nenapadajočih se trdnjav na desko D. Označimo število polj deske D z $|D|$. Polinom

$T(D,x)$ = vsota $_{0 <= k <= |D|}$ $t_k(D)\, x^k$

imenujemo *trdnjavski polinom* deske D.

Izrek (rekurzivne formule za $T(D,x)$).

1. Naj bo deska D unija desk D_1 in D_2, za kateri velja: množici vrstic desk D_1 in D_2 sta disjunktni, prav tako sta disjunktni množici stolpcev desk D_1 in D_2. Potem je $T(D,x) = T(D_1,x)\, T(D_2,x)$.

2. Naj bo $a = (i,j)$ poljubno polje deske D. Z $D\backslash a$ označimo desko, ki jo dobimo iz D, če odstranimo polje a, z D/a pa desko, ki jo dobimo iz D, če odstranimo vsa polja v vrstici i in vsa polja v stolpcu j. Potem je $T(D,x) = T(D\backslash a, x) + x\, T(D/a, x)$.

Trditev. Naj bo D' komplement deske D v pravokotni deski velikosti m x n. Potem je

$t_k(D)$ = vsota $_{0 <= j <= m}$ $(-1)^j$ ($m-j$ nad $k-j$) ($n-j$ nad $k-j$) $(k-j)!\, t_j(D')$.