**Osnove kombinatornega preštevanja**

***Oznake****: N0* = {0,1,2, ...}, *N* = {1,2,3, ...}

Število elementov (moč) končne množice *A* označimo z *|A|.*

*Padajoča potenca:* *xn\_* = produkt *0 <= k <= n-1 (x - k)* (*n* iz *N*)

*Rastoča potenca:* *xn¯* = produkt *0 <= k <= n-1 (x + k)* (*n* iz *N*)

*Binomski koeficient:* *(x* nad *k)* = *xk\_ / k!* (*k iz N0*)

*(x* nad *k)* = 0(*k* iz -*N*)

*Definicija****. Stirlingovo število 2. vrste*** *S(n,k)* je število razdelitev (particij) množice moči *n* na *k* nepraznih blokov.

Rekurzivna enačba za Stirlingova števila 2. vrste: Za *n, k* >= 1 je

*S(n,k)* = *S(n-1,k-1)* + *k S(n-1,k)*.

*Definicija****. Bellovo število*** *Bn* je število vseh razdelitev (particij) množice moči *n* na neprazne bloke. Velja: *Bn =* vsota *0 <= k <= n S(n,k).*

Rekurzivna enačba za Bellova števila: Za *n* >= 0 je

*Bn+1* = vsota *0 <= k <= n (n* nad *k) Bk*.

**Dvanajstera pot**

Preštevamo preslikave iz množice *A* v množico *B*, kjer je *|A| = n* in *|B| = k*. Pri tem ločimo 4 primere glede na to, ali elemente množice *A* oziroma elemente množice *B* razlikujemo med seboj ali ne, in 3 primere glede na to, ali preštevamo vse preslikave, injektivne preslikave ali surjektivne preslikave. Rezultate prikazuje tabela:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *elemente A* | *elemente B* | *vse preslikave* | *injekcije* | *surjekcije* |
| razlikujemo | razlikujemo | *kn* | *kn\_* | *S(n,k) k!* |
| ne razlikujemo | razlikujemo | (*n+k-1* nad *n*) | (*k* nad *n*) | (*n-1* nad *n-k*) |
| razlikujemo | ne razlikujemo | vsota *0<=j<= n S(n,j)* | {1, če *k>=n* {0, sicer | *S(n,k)* |
| ne razlikujemo | ne razlikujemo | vsota *0<=j<= n p(n,j)* | {1, če *k>=n* {0, sicer | *p(n,k)* |

*Definicija****. Razčlenitev*** ali ***particija*** naravnega števila *n* na *k* členov je urejena *k*-terica naravnih števil *l = (l1,l2, ..., lk),* za katera velja:

1. *l1 +l2 + ... + lk* = n,
2. *l1 >=l2 >= ... >= lk >=* 1*.*

*Š*tevilo razčlenitev števila *n* na *k* členov označimo s *p(n,k)*, število vseh razčlenitev števila *n* pa s *p(n)*. Velja: *p(n) =* vsota *0 <= k <= n p(n,k).*

Rekurzivna enačba za števila *p(n,k)*: Za *n >= k* >= 1 je

*p(n,k)* = *p(n-1,k-1)* + *p(n-k,k)*.

*Zgled uporabe dvanajstere poti:  
  
Definicija****. Urejena razčlenitev*** ali ***dekompozicija*** naravnega števila *n* na *k* členov je urejena *k*-terica naravnih števil *l = (l1,l2, ..., lk),* za kateraje *l1 +l2 + ... + lk* = *n*.

*Trditev*.

1. Število dekompozicij števila *n* na *k* členov je enako (*n-1* nad *n-k*).
2. Število dekompozicij števila *n* je enako 1, če je *n = 0*, oziroma *2n-1*, če je *n* >= 1.

*Definicija****. Lahovo število*** *L(n,k)* je število razdelitev (particij) množice moči *n* na *k* linearno urejenih nepraznih blokov.

*Trditev*. *L(n,k) = n!/k!* (*n-1* nad *n-k*).

*Definicija****. Stirlingovo število 1. vrste*** s*(n,k)* je število razdelitev (particij) množice moči *n* na *k* ciklično urejenih nepraznih blokov.

Rekurzivna enačba za Stirlingova števila 1. vrste: Za *n, k* >= 1 je

*s(n,k)* = s*(n-1,k-1)* + *(n-1) s(n-1,k)*.

Stirlingova in Lahova števila igrajo vlogo povezovalnih koeficientov med bazami prostora polinomov, ki jih sestavljajo navadne, padajoče in rastoče potence. Veljajo naslednje zveze:

a) *xn =* vsota *0 <= k <= n S(n,k) xk\_*

b) *xn¯ =* vsota *0 <= k <= n L(n,k) xk\_*

c) *xn¯ =* vsota *0 <= k <= n s(n,k) xk*

a') *xn =* vsota *0 <= k <= n (-1)n+k S(n,k) xk¯*

b') *xn\_ =* vsota *0 <= k <= n (-1)n+k L(n,k) xk¯*

c') *xn\_ =* vsota *0 <= k <= n (-1)n+k s(n,k) xk*

*Definicija*. ***Permutacija množice*** *A* je bijekcija množice *A* vase.

Vse permutacije množice *A* z operacijo komponiranja sestavljajo grupo *S(A)*, ki jo imenujemo *simetrična grupa množice A*. Simetrično grupo množice {1,2,...,n} označimo tudi *Sn*. Velja: |*Sn*| = *n*!.

Razcep permutacije na disjunktne cikle nam pokaže, da so permutacije iz *Sn* v bijektivni zvezi z razdelitvami množice {1,2,...,n} na neprazne ciklično urejene bloke. Torej je število permutacij iz *Sn* z natanko *k* cikli enako *s(n,k)* in velja: vsota *0 <= k <= n s(n,k) = n!.*

*Definicija*. ***Množica s ponovitvami*** ali ***multimnožica*** je preslikava *m* neke končne množice *A* v množico naravnih števil *N0*. Za element *a* iz *A* imenujemo število *m(a)* kratnost elementa *a* v multimnožici *m*. *Moč* multimnožice *m: A -> N0* je vsota kratnosti vseh elementov množice *A*. Označimo jo *|m|*.

*Definicija*. ***Permutacija multimnožice*** *m: A -> N*0, kjer je *|m| = n*, je urejena n-terica *(x1, x2, ..., xn)*, v kateri vsak *a* iz *A* nastopa natanko *m(a)*-krat.

***Izrek***. Število vseh permutacij multimnožice *m: A -> N*0, kjer je *|A| = r* in *|m| = n*, je enako

(*n* nad *k1, k2, ..., kr*) = *n!/(k1! k2! ... kr!)*,

kjer je *ki*kratnost *i*-tega elementa množice *A* v multimnožici *m*. Število (*n* nad *k1, k2, ..., kr*) imenujemo *multinomski koeficient*.

***Multinomski izrek.*** *(x1 + x2 + ... + xr)n* = vsota (*n* nad *k1, k2, ..., kr*) *x1k1 x2k2 ... xrkr*,

kjer v vsoti na desni seštevamo po vseh urejenih *r*-tericah (*k1, k2, ..., kr*) iz *N0r*, za katere je *k1 + k2 + ... + kr* = *n*.