**Osnovno o grafih**

*Definicija*. (Enostaven neusmerjen) ***graf*** je urejen par *G = (V, E),* kjer je *V* neprazna končna množica *vozlišč*, *E* pa množica *povezav*, ki so množice po dveh različnih vozlišč iz *V*. Pri tem zahtevamo, da sta si množici *V* in *E* tuji.

Neformalno smo omenili druge vrste grafov, kot so multigrafi, psevdografi, usmerjeni grafi, neskončni grafi, hipergrafi.

Definirali smo *stopnjo* *dG*(*v*) vozlišča *v* iz *V*(*G*) ter *največjo stopnjo Delta*(*G*) in *najmanjšo stopnjo delta*(G) vozlišč grafa *G*. Graf je *regularen*, če imajo vsa vozlišča enako stopnjo, *d-regularen*, če imajo vsa vozlišča stopnjo enako *d*, in *kubičen*, če je 3-regularen.

*Prvi izrek teorije grafov* pove, da je vsota stopenj vseh vozlišč enaka dvakratniku števila povezav grafa. Posledici: število vozlišč lihe stopnje je vselej sodo, vsak kubičen graf ima sodo mnogo vozlišč.

Definirali smo *dvodelne grafe* ter naslednje standardne družine grafov: *Kn* (polni grafi), *Pn* (poti), *Cn* (cikli), *Km,n* (polni dvodelni grafi), *Qd* (hiperkocke) in *Wn* (kolesa).

Definirali smo relacije *podgraf, vpeti podgraf* in *inducirani podgraf* ter vpeljali oznako *G[U]* za inducirani podgraf grafa *G* z množico vozlišč *U*, oziroma *G[F]* za vpeti podgraf grafa *G* z množico povezav *F*.

Definirali smo *sprehod od u do v dolžine k*, *enostaven sprehod od u do v dožine k* in *pot od u do v dožine k*.

Definirali smo *stik* dveh sprehodov, *obrat* sprehoda in *odsek* sprehoda med dvema vozliščema na njem. Dolžino sprehoda *S* označujemo z |*S*|.

*Lema.* Če v grafu *G* obstaja sprehod *S* od *u* do *v*, obstaja tudi pot *P* od *u* do *v*, za katero je |*P*| <= |*S*|.

*Definicija.* Graf *G* je *povezan*, če v njem za vsaki dve vozlišči *u* in *v* obstaja pot od *u* do *v.*Definirali smo *povezane komponente* grafa *G* innjihovo število označili z *Omega(G)*.

Pokazali smo, da je v povezanem grafu dolžina najkrajše poti od *u* do *v* razdalja (metrika) na množici vozlišč grafa *V(G)*. Definirali smo *premer* *diam(G)* povezanega grafa *G* kot največjo razdaljo med katerimakoli vozliščema v *G*.

*Definicija.* Sprehod v grafu *G* je *obhod*, če je njegovo končno vozlišče enako začetnemu. Obhod dolžine *k* >= 3 je *cikel*, če vsebuje *k* različnih vozlišč.

***Izrek*** (karakterizacija dvodelnih grafov s cikli). *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje ciklov lihe dolžine.*

*Definicija.* Grafa *G1* in *G2* sta *izomorfna*, če obstaja bijekcija *f: V(G1)* -> *V(G2)*, ki ohranja sosednost vozlišč.

Izomorfna grafa imata enako:
- število vozlišč,
- število povezav,
- zaporedje stopenj vozlišč,
- število ciklov dolžine *k* za vse *k*,
itd.

**Operacije z grafi**
 *1.* *Brisanje vozlišč in povezav*

Če je *U* podmnožica *V(G)* in *F* podmnožica *E(G)*, definiramo:

*G - U* *:= G[V(G) brez U],
G - F := G[E(G) brez F].*Če je *v* vozlišče in *e* povezava grafa *G*, pišemo

*G - v := G - {v},
G - e := G - {e}.*

*2.* *Komplementarni graf*
Grafu *G* priredimo njegov *komplementarni graf* *G-* takole:

*V(G-) = V(G),
E(G-) = {uv; u,v* iz *V(G)*, *uv* ni povezava grafa *G}*

*3. Povezavni graf:* Grafu *G* priredimo povezavni graf *L(G)* takole:

*V(L(G)) = E(G),
E(L(G)) = {ef; e,f* iz *E(G)*, *e* presek *f <> 0}*

*4. Kartezični produkt G1* kvadrat *G2* grafov *G1* in *G2* definiramo takole:

*V(G1* kvadrat *G2) = V(G1)* kvadrat *V(G2),
(u1,u2) ~ (v1,v2) <===> (u1 = v1* in *u2 ~ v2)* ali *(u1 ~ v1* in *u2 = v2).*

*5. Krčenje povezav*Če je *G* multigraf in *e* iz *E(G)*, z *G/e* označimo multigraf, dobljen iz *G* tako, da identificiramo krajišči povezave *e* in odstranimo vse nastale zanke.

*6. Dodajanje povezav*Naj bo *G* graf in *x,y* iz *V(G).* Z *G + xy* označimo graf, za katerega je

*V(G + xy) = V(G),
E(G + xy) = E(G)* unija *{xy}.*