Osnovno o grafih

Definicija. (Enostaven neusmerjen) ***graf*** je urejen par $G = (V, E)$, kjer je V neprazna končna množica *vozlišč*, E pa množica *povezav*, ki so množice po dveh različnih vozlišč iz V. Pri tem zahtevamo, da sta si množici V in E tuji.

Neformalno smo omenili druge vrste grafov, kot so multigrafi, psevdografi, usmerjeni grafi, neskončni grafi, hipergrafi.

Definirali smo *stopnjo* $d_G(v)$ vozlišča v iz $V(G)$ ter *največjo stopnjo Delta*(G) in *najmanjšo stopnjo delta*(G) vozlišč grafa G. Graf je *regularen*, če imajo vsa vozlišča enako stopnjo, *d-regularen*, če imajo vsa vozlišča stopnjo enako d, in *kubičen*, če je 3-regularen.

Prvi izrek teorije grafov pove, da je vsota stopenj vseh vozlišč enaka dvakratniku števila povezav grafa. Posledici: število vozlišč lihe stopnje je vselej sodo, vsak kubičen graf ima sodo mnogo vozlišč.

Definirali smo *dvodelne grafe* ter naslednje standardne družine grafov: K_n (polni grafi), P_n (poti), C_n (cikli), $K_{m,n}$ (polni dvodelni grafi), Q_d (hiperkocke) in W_n (kolesa).

Definirali smo relacije *podgraf, vpeti podgraf* in *inducirani podgraf* ter vpeljali oznako *G[U]* za inducirani podgraf grafa G z množico vozlišč U, oziroma *G[F]* za vpeti podgraf grafa G z množico povezav F.

Definirali smo *sprehod od u do v dolžine k*, *enostaven sprehod od u do v dožine k* in *pot od u do v dožine k*.

Definirali smo *stik* dveh sprehodov, *obrat* sprehoda in *odsek* sprehoda med dvema vozliščema na njem. Dolžino sprehoda S označujemo z $|S|$.

Lema. Če v grafu G obstaja sprehod S od u do v, obstaja tudi pot P od u do v, za katero je $|P| <= |S|$.

Definicija. Graf G je *povezan*, če v njem za vsaki dve vozlišči u in v obstaja pot od u do v.

Definirali smo *povezane komponente* grafa G in njihovo število označili z *Omega(G)*.

Pokazali smo, da je v povezanem grafu dolžina najkrajše poti od u do v razdalja (metrika) na množici vozlišč grafa $V(G)$. Definirali smo *premer diam(G)* povezanega grafa G kot največjo razdaljo med katerimakoli vozliščema v G.

Definicija. Sprehod v grafu G je *obhod*, če je njegovo končno vozlišče enako začetnemu. Obhod dolžine $k >= 3$ je *cikel*, če vsebuje k različnih vozlišč.

Izrek (karakterizacija dvodelnih grafov s cikli). *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje ciklov lihe dolžine.*

Definicija. Grafa G_1 in G_2 sta *izomorfna*, če obstaja bijekcija $f: V(G_1) \to V(G_2)$, ki ohranja sosednost vozlišč.

Izomorfna grafa imata enako:
- število vozlišč,
- število povezav,
- zaporedje stopenj vozlišč,
- število ciklov dolžine *k* za vse *k*,
itd.

Operacije z grafi

1. Brisanje vozlišč in povezav

Če je *U* podmnožica *V(G)* in *F* podmnožica *E(G)*, definiramo:

G - U := G[V(G) brez U],
G - F := G[E(G) brez F].

Če je *v* vozlišče in *e* povezava grafa *G*, pišemo

G - v := G - {v},
G - e := G - {e}.

2. Komplementarni graf

Grafu *G* priredimo njegov *komplementarni graf* G^- takole:

$V(G^-) = V(G)$,
$E(G^-) = \{uv;\ u,v$ iz $V(G)$, uv ni povezava grafa $G\}$

3. Povezavni graf: Grafu *G* priredimo povezavni graf *L(G)* takole:

V(L(G)) = E(G),
E(L(G)) = {ef; e,f iz *E(G)*, *e* presek *f <> 0}*

4. Kartezični produkt G_1 kvadrat G_2 grafov G_1 in G_2 definiramo takole:

$V(G_1$ kvadrat $G_2) = V(G_1)$ kvadrat $V(G_2)$,
$(u_1,u_2) \sim (v_1,v_2)$ <===> $(u_1 = v_1$ in $u_2 \sim v_2)$ ali $(u_1 \sim v_1$ in $u_2 = v_2)$.

5. Krčenje povezav

Če je *G* multigraf in *e* iz *E(G)*, z *G/e* označimo multigraf, dobljen iz *G* tako, da identificiramo krajišči povezave *e* in odstranimo vse nastale zanke.

6. Dodajanje povezav

Naj bo *G* graf in *x,y* iz *V(G).* Z *G* + *xy* označimo graf, za katerega je

$V(G + xy) = V(G)$,
$E(G + xy) = E(G)$ unija $\{xy\}$.