**Ravninski grafi**

*Definicija. Jordanov lok* v ravnini je zaloga vrednosti injekcije *fi:* [0,1] -> *R2*. Točki *fi(0)* in *fi(1)* sta *krajišči*, množica *fi(*(0,1)*)* pa *notranjost* loka *fi(*[0,1]*).  
  
Definicija.* ***Graf v ravnini*** je par *(V,E)*, kjer je:  
1. *V* neprazna končna množica točk v ravnini*,*  
2. *E* končna množica Jordanovih lokov s krajišči v množici *V*, za katero velja:  
3. za vse različne *e,f* iz *E* je *|e* presek *f|* <= 1, *e* presek *f* podmnožica *V*,  
4. za vse *e* iz *E* je presek *V* z notranjostjo *e* prazen.  
  
Grafu v ravnini *G = (V,E)* priredimo (abstraktni) graf *G' = (V,E')*, kjer je *E'* = {{*x,y*}; obstaja *e* iz *E*: *x,y* sta krajišči *e*}.  
  
*Definicija.* Graf *G* je ***ravninski graf***, če obstaja graf v ravnini *H*, tako da je *G* izomorfen grafu *H'*. V tem primeru imenujemo *H* *vložitev grafa G v ravnino*.  
  
*Definicija.* Naj bo *G = (V,E)* graf v ravnini. Množica točk v ravnini *S(G) = V* unija (unija *E*) je *slika grafa G*. Povezane komponente komplementa množice *S(G)* v ravnini so ***lica*** grafa *G*. Množico vseh lic grafa v ravnini *G* označimo z *F(G)*.  
  
*Izrek.* Graf v ravnini ima natanko eno neomejeno lice.  
  
*Definicija.* Naj bo *G* graf v ravnini. *Dolžina d(f)* lica *f* iz *F(G)* je število povezav *e* iz *E(G)*, ki ležijo na robu lica *f*, pri čemer povezave, ki ne ležijo na robu nobenega drugega lica, štejemo dvojno.  
  
*Trditev*. Za graf v ravnini *G* velja: vsota *f* iz *F(G)* *d(f)* = 2|*E(G)*|.  
  
***Izrek*** *(Eulerjeva formula).* Za graf v ravnini *G* velja:   
  
|*V(G)*| - |*E(G)*| + |*F(G)*| = *Omega(G)* + 1.

***Izrek.*** Naj bo *G* graf v ravnini in |*V(G)*| >= 3. Potem velja:   
  
|*E(G)*| <= 3|*V(G)*| - 6.  
  
*Posledica****.*** Graf *K5* ni ravninski.   
  
***Izrek.*** Naj bo *G* graf v ravnini brez trikotnikov in |*V(G)*| >= 3. Potem velja:   
  
|*E(G)*| <= 2|*V(G)*| - 4.  
  
*Posledica****.*** Graf *K3,3* ni ravninski.   
  
*Definicija.* Graf *G* je ***subdivizija*** grafa *H*, če *G* dobimo iz *H* tako, da povezave nadomestimo s potmi dolžine >= 1. Pri tem nobena nova pot ne sme imeti notranjih vozlišč v *V(G)* ali na drugi novi poti.  
  
***Izrek Kuratowskega.*** *G ravninski graf <==>* *G ne vsebuje podgrafa, izomorfnega subdiviziji K5 ali K3,3.  
  
Definicija.* Graf *G* je ***minor*** grafa *H*, če *G* dobimo iz nekega podgrafa grafa *H* s krčenjem nekaterih povezav (pri čemer nastale vzporedne povezave odstranjujemo).  
  
***Wagnerjev izrek.*** *G ravninski graf <==>* *G ne vsebuje minorja, izomorfnega K5 ali K3,3.*