Ravninski grafi

Definicija. Jordanov lok v ravnini je zaloga vrednosti injekcije *fi:* [0,1] -> R^2. Točki *fi(0)* in *fi(1)* sta *krajišči*, množica *fi(*(0,1)*)* pa *notranjost* loka *fi(*[0,1]*)*.

Definicija. ***Graf v ravnini*** je par *(V,E)*, kjer je:
1. *V* neprazna končna množica točk v ravnini,
2. *E* končna množica Jordanovih lokov s krajišči v množici *V*, za katero velja:
3. za vse različne *e,f* iz *E* je |*e* presek *f*| <= 1, *e* presek *f* podmnožica *V*,
4. za vse *e* iz *E* je presek *V* z notranjostjo *e* prazen.

Grafu v ravnini *G* = *(V,E)* priredimo (abstraktni) graf *G'* = *(V,E')*, kjer je *E'* = {{*x,y*}; obstaja *e* iz *E*: *x,y* sta krajišči *e*}.

Definicija. Graf *G* je ***ravninski graf***, če obstaja graf v ravnini *H*, tako da je *G* izomorfen grafu *H'*. V tem primeru imenujemo *H vložitev grafa G v ravnino*.

Definicija. Naj bo *G = (V,E)* graf v ravnini. Množica točk v ravnini *S(G) = V* unija (unija *E*) je *slika grafa G*. Povezane komponente komplementa množice *S(G)* v ravnini so ***lica*** grafa *G*. Množico vseh lic grafa v ravnini *G* označimo z *F(G)*.

Izrek. Graf v ravnini ima natanko eno neomejeno lice.

Definicija. Naj bo *G* graf v ravnini. *Dolžina d(f)* lica *f* iz *F(G)* je število povezav *e* iz *E(G)*, ki ležijo na robu lica *f*, pri čemer povezave, ki ne ležijo na robu nobenega drugega lica, štejemo dvojno.

Trditev. Za graf v ravnini *G* velja: vsota$_{f \text{ iz } F(G)}$ *d(f)* = 2|*E(G)*|.

Izrek *(Eulerjeva formula).* Za graf v ravnini *G* velja:

|*V(G)*| - |*E(G)*| + |*F(G)*| = *Omega(G)* + 1.

Izrek. Naj bo *G* graf v ravnini in |*V(G)*| >= 3. Potem velja:

|*E(G)*| <= 3|*V(G)*| - 6.

Posledica. Graf K_5 ni ravninski.

Izrek. Naj bo *G* graf v ravnini brez trikotnikov in |*V(G)*| >= 3. Potem velja:

|*E(G)*| <= 2|*V(G)*| - 4.

Posledica. Graf $K_{3,3}$ ni ravninski.

Definicija. Graf *G* je ***subdivizija*** grafa *H*, če *G* dobimo iz *H* tako, da povezave nadomestimo s potmi dolžine >= 1. Pri tem nobena nova pot ne sme imeti notranjih vozlišč v *V(G)* ali na drugi novi poti.

Izrek Kuratowskega. *G ravninski graf <==> G ne vsebuje podgrafa, izomorfnega subdiviziji* K_5 *ali* $K_{3,3}$.

Definicija. Graf *G* je ***minor*** grafa *H*, če *G* dobimo iz nekega podgrafa grafa *H* s krčenjem nekaterih povezav (pri čemer nastale vzporedne povezave odstranjujemo).

Wagnerjev izrek. *G ravninski graf <==> G ne vsebuje minorja, izomorfnega* K_5 *ali* $K_{3,3}$.