**Rekurzivne enačbe in rodovne funkcije**

**Predstavitve zaporedij**

Zaporedje (*a0, a1, a2, ...*) s kompleksnimi členi oziroma *a: N0* -> *C* lahko predstavimo oziroma podamo na več različnih načinov, npr.:

a) *eksplicitno*: *an = f(n)*

b) *rekurzivno*: *an = F(n, an-1, an-2, ..., a0)*

c) z *rodovno funkcijo: Gf(a,x) =* vsota *n >= 0 an xn*

Rodovna funkcija zaporedja *a* je formalna potenčna vrsta, katere koeficienti so členi zaporedja *a*.

**Kolobar formalnih potenčnih vrst C[[x]]**

*Elementi*: zaporedja *a: N0* -> *C*, ki jih pišemo v obliki potenčnih vrst:

*a(x) =* vsota *n >= 0 an xn.*

*Operacije:*

1. seštevanje:

vsota *n >= 0 an xn +* vsota *n >= 0 bn xn =* vsota *n >= 0 (an + bn) xn*

2. množenje (*Cauchyjev produkt* ali *konvolucija* zaporedij):

(vsota *n >= 0 an xn*) (vsota *n >= 0 bn xn*) *=* vsota *n >= 0 cn xn*,

kjer je *cn* = vsota 0 <= k <= 0 *ak bn-k.*

3. produkt s skalarjem *lambda* iz *C*:

*lambda* (vsota *n >= 0 an xn*) = vsota *n >= 0* (*lambda an*) *xn*.

***Trditev.***

1. (*C[[x]]*, +, .) je cel kolobar z ničlo (0,0,0,...) in enico (1,0,0,...), ki vsebuje kolobar polinomov (*C[x]*, +, .) kot podkolobar.

2. (*C[[x]]*, +) skupaj s produktom s skalarjem je vektorski prostor nad *C*.

***Trditev.*** Formalna potenčna vrsta *a(x) =* vsota *n >= 0 an xn* iz *C[[x]]* je obrnljiva za množenje natanko tedaj, ko *a0* ni enako *0.*

**Metoda rodovnih funkcij za reševanje rekurzivnih enačb**

Zaporedje a, podano rekurzivno, želimo predstaviti eksplicitno. To poskušamo storiti v naslednjih treh korakih (ki žal ne uspejo vedno):

1. Rekurzivno enačbo za *a* spremenimo v funkcijsko enačbo za *Gf(a,x)*.

2. Dobljeno enačbo rešimo v kolobarju (*C[[x]]*, +, .) in dobimo *Gf(a,x)*.

3. Iz *Gf(a,x)* odčitamo formulo za njen *n*-ti koeficient *an.*

**Odvod v C[[x]]**

*Definicija.* Za f. p. vrsto *a(x) =* vsota *n >= 0 an xn* iz *C[[x]]* naj bo

*a'(x) =* vsota *n >= 0 (n+1) an+1 xn.*

***Lastnosti:*** Za vse *a, b* iz *C[[x]]* in *lambda*, *mi* iz *C* velja:

a) *a*' = 0 <==> *a* = *a0*,

b) (*lambda a + mi b*)' = *lambda a' + mi b'*,

c) *(a b)' = a' b + a b'*,

d) *b*0 <> 0 ==> (*a*/*b*)' = (*a' b - a b')/b*2.

**Binomska vrsta**

*Definicija.* Za *lambda* iz *C* naj bo

*Blambda*(*x*) *=* vsota *n >= 0 (lambda* nad *n)xn.*

***Lastnosti:*** Za vse *lambda*, *mi* iz *C*, *k* iz *Z* in *n* iz *N* velja:

a) (1 + *x*) *B*'*lambda*(*x*) *= lambda Blambda*(*x*),

b) *Blambda + mi*(*x*) = *Blambda*(*x*) *Bmi*(*x*),

c)*Bk lambda*(*x*) = *Blambda*(*x*)*k*,

d)*Bk*(*x*) = (1 + *x*)*k*,

e)*Bk*/*n*(*x*)*n* = (1 + *x*)*k*.

Zaradi teh lastnosti za vrsto *Blambda*(*x*) za vse *lambda* iz *C* uporabljamo oznako (1 + *x*)*lambda*.

**Substitucija v C[[x]]**

*Definicija.* Za f. p. vrsto *a(x) =* vsota *n >= 0 an xn* definiramo: *a(0) = a0.*

*Definicija.* Za f. p. vrsti *a(x) =* vsota *n >= 0 an xn* in *b(x) =* vsota *n >= 0 bn xn*, pri čemer je *b(*0*) =* 0, definiramo *kompozitum*

*a(x)* o *b(x) = a(b(x)) =* vsota *n >= 0* vsota *0 <= k <= n ak bn(k)xn*,

kjer je *bn(k)* koeficient pri *xn* v vrsti *b(x)k*.

***Lastnosti:*** Za vse *f, g, h* iz *C[[x]]* velja:

a) *g(0) = h(0) = 0* ==> (*f* o *g*) o *h* = *f* o(*g* o *h*),

b) *h(0) = 0* ==> (*f* + *g*) o *h* = *f* o *h* + *g* o *h,*

c)*h(0) = 0* ==> (*f g*) o *h* = (*f* o *h*)(*g* o *h*),

d)*f(0) <> 0, h(0) = 0*==> obstaja (*f* o *g*)-1 in (*f* o *g*)-1 = *f -1* o *g*.

**Obseg formalnih Laurentovih vrst C((x))**

Ker je *C[[x]]* cel kolobar, ga lahko vložimo v ustrezni obseg ulomkov *C((x))*. Elemente *C((x))* lahko enačimo s formalnimi Laurentovimi vrstami oblike

vsota *n >= m cn xn*, kjer je *m* celo število in so koeficienti *cn* kompleksna števila.

***Zgled:*** Po metodi rodovnih funkcij smo rešili rekurzivno enačbo za Catalanova števila *Cn*

*C*0 = 1, *Cn* = vsota *0 <= k <= n-1 Ck Cn-k-1* za *n* >= 1.

Ugotovili smo, da je *Gf(C,x) =* (1 - (1 - 4*x*)1/2)/(2*x*) in da je

*Cn* = (2*n* nad *n*)/(*n*+1)*.*

**Linearne rekurzivne enačbe**

V vektorskem prostoru zaporedij s kompleksnimi členi *CN0* smo definirali *operator pomika E* in *linearni rekurzivni operator L reda d* s koeficienti *c0, c1, ..., cd: N0* -> *C*, kjer *cd* ni identično 0, takole:

*L* = vsota 0 <= *k* <= *d* *ck(n) Ek*.

***Izrek.*** Če je *L* linearni rekurzivni operator reda *d*, kjer je *cd(n) <>* 0za vse *n*, je množica rešitev homogene linearne rekurzivne enačbe *Ly =* 0 (oziroma: jedro Ker *L* operatorja *L*) *d*-razsežen podprostor prostora *CN0*.

***Trditev.*** Naj bo *p* ena od rešitev nehomogene enačbe *Ly = f*. Potem je množica vseh rešitev enačbe *Ly = f* enaka *p* + Ker *L*.

**Linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti**

*Definicija.* Naj bo *L* = vsota 0 <= k <= d *ck Ek* linearni rekurzivni operator s konstantnimi koeficienti *c0,c1, ..., cd* iz *C*, kjer je *c0cd* <> 0. Potem enačbo *Ly = f* imenujemo *linearna rekurzivna enačba reda d s konstantnimi koeficienti*.

*Definicija.* Zaporedje *a* iz *CN0* je *C-rekurzivno*, če zadošča kakšni homogeni linearni rekurzivni enačbi s konstantnimi koeficienti.

***Izrek.*** Za *a* iz *CN0* so naslednje trditve enakovredne:  
  
(i) *a* je C-rekurzivno zaporedje,  
(ii) obstajata polinoma *p, q* iz *C[x]*, tako da je st(*p*) < st(*q*), *q*(0) <> 0 in *Gf*(*a,x*) *= p*(*x*)/*q*(*x*)*,*  
(iii) obstajajo *r* iz *N*, polinomi *p*1, ..., *pr* iz *C[n]* in od 0 različna kompleksna števila *lambda*1, ..., *lambdar*, tako da za vse *n* iz *N*0 velja:  
*an* =vsota 1 <= *i* <= *r* *pi*(*n*) *lambdain*.

Zapisali smo postopek za konstrukcijo splošne rešitve homogene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti *Ly =* 0.  
  
Ugotovili smo, da je kompozitum linearnih rekurzivnih operatorjev *L1* in *L2* s konstantnimi koeficienti linearni rekurzivni operator, ki ga dobimo, če *L1* in *L2* zmnožimo kot polinoma spremenljivke *E*. Od tod sledi, da je komponiranje linearnih rekurzivnih operatorjev s konstantnimi koeficienti komutativno.  
  
Za nehomogeno linearno rekurzivno enačbo s konstantnimi koeficienti *Ly = f*, kjer je *f(n) = p(n) lambdan* in je *p(n)* polinom stopnje *r, lambda* pa ničla karakterističnega polinoma operatorja *L* stopnje *s >=* 0, smo pokazali, da ima rešitev oblike *nsP(n) lambdan*, kjer je *P(n)* polinom stopnje <= *r.* Zapisali smo postopek za konstrukcijo splošne rešitve takšne enačbe.