Rekurzivne enačbe in rodovne funkcije

Predstavitve zaporedij

Zaporedje (a_0, a_1, a_2, ...) s kompleksnimi členi oziroma a: N_0 -> C lahko predstavimo oziroma podamo na več različnih načinov, npr.:

a) *eksplicitno*: $a_n = f(n)$

b) *rekurzivno*: $a_n = F(n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0)$

c) z *rodovno funkcijo: Gf(a,x)* = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$

Rodovna funkcija zaporedja *a* je formalna potenčna vrsta, katere koeficienti so členi zaporedja *a*.

Kolobar formalnih potenčnih vrst C[[x]]

Elementi: zaporedja a: N_0 -> C, ki jih pišemo v obliki potenčnih vrst:

$a(x)$ = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$.

Operacije:

1. seštevanje:

vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$ + vsota $_{n >= 0}$ $b_n x^n$ = vsota $_{n >= 0}$ $(a_n + b_n) x^n$

2. množenje (*Cauchyjev produkt* ali *konvolucija* zaporedij):

(vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$) (vsota $_{n >= 0}$ $b_n x^n$) = vsota $_{n >= 0}$ $c_n x^n$,

kjer je c_n = vsota $_{0 <= k <= 0}$ $a_k b_{n-k}$.

3. produkt s skalarjem *lambda* iz *C*:

lambda (vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$) = vsota $_{n >= 0}$ (*lambda* a_n) x^n.

Trditev.

1. (*C[[x]]*, +, .) je cel kolobar z ničlo (0,0,0,...) in enico (1,0,0,...), ki vsebuje kolobar polinomov (*C[x]*, +, .) kot podkolobar.

2. (*C[[x]]*, +) skupaj s produktom s skalarjem je vektorski prostor nad *C*.

Trditev. Formalna potenčna vrsta $a(x)$ = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$ iz *C[[x]]* je obrnljiva za množenje natanko tedaj, ko a_0 ni enako *0*.

Metoda rodovnih funkcij za reševanje rekurzivnih enačb

Zaporedje a, podano rekurzivno, želimo predstaviti eksplicitno. To poskušamo storiti v naslednjih treh korakih (ki žal ne uspejo vedno):

1. Rekurzivno enačbo za *a* spremenimo v funkcijsko enačbo za *Gf(a,x)*.

2. Dobljeno enačbo rešimo v kolobarju (*C[[x]]*, +, .) in dobimo *Gf(a,x)*.

3. Iz *Gf(a,x)* odčitamo formulo za njen *n*-ti koeficient a_n.

Odvod v C[[x]]

Definicija. Za f. p. vrsto $a(x)$ = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$ iz *C[[x]]* naj bo

$a'(x)$ = vsota $_{n >= 0}$ $(n+1)\ a_{n+1}\, x^n$.

Lastnosti: Za vse *a*, *b* iz *C[[x]]* in *lambda*, *mi* iz *C* velja:

a) $a' = 0 <==> a = a_0$,

b) (*lambda a* + *mi b*)' = *lambda a'* + *mi b'*,

c) *(a b)' = a' b + a b'*,

d) b_0 <> 0 ==> (*a*/*b*)' = (*a' b - a b'*)/b^2.

Binomska vrsta

Definicija. Za *lambda* iz *C* naj bo

$B_{lambda}(x)$ = vsota $_{n >= 0}$ (*lambda* nad *n*) x^n.

Lastnosti: Za vse *lambda*, *mi* iz *C*, *k* iz *Z* in *n* iz *N* velja:

a) $(1 + x)\ B'_{lambda}(x)$ = *lambda* $B_{lambda}(x)$,

b) $B_{lambda + mi}(x) = B_{lambda}(x)\ B_{mi}(x)$,

c) $B_{k\ lambda}(x) = B_{lambda}(x)^k$,

d) $B_k(x) = (1 + x)^k$,

e) $B_{k/n}(x)^n = (1 + x)^k$.

Zaradi teh lastnosti za vrsto $B_{lambda}(x)$ za vse *lambda* iz *C* uporabljamo oznako $(1 + x)^{lambda}$.

Substitucija v C[[x]]

Definicija. Za f. p. vrsto *a(x)* = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$ definiramo: $a(0) = a_0$.

Definicija. Za f. p. vrsti *a(x)* = vsota $_{n >= 0}$ $a_n x^n$ in *b(x)* = vsota $_{n >= 0}$ $b_n x^n$, pri čemer je *b(*0*)* = 0, definiramo *kompozitum*

$a(x) \circ b(x) = a(b(x))$ = vsota $_{n >= 0}$ vsota $_{0 <= k <= n}$ $a_k\, b_n^{(k)}\, x^n$,

kjer je $b_n^{(k)}$ koeficient pri x^n v vrsti $b(x)^k$.

Lastnosti: Za vse *f*, *g*, *h* iz *C[[x]]* velja:

a) $g(0) = h(0) = 0 ==> (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,

b) $h(0) = 0 ==> (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$,

c) $h(0) = 0 ==> (f g) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$,

d) *f(0) <> 0, h(0) = 0* ==> obstaja $(f \circ g)^{-1}$ in $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g$.

Obseg formalnih Laurentovih vrst C((x))

Ker je *C[[x]]* cel kolobar, ga lahko vložimo v ustrezni obseg ulomkov *C((x))*. Elemente *C((x))* lahko enačimo s formalnimi Laurentovimi vrstami oblike

vsota $_{n >= m}$ $c_n x^n$, kjer je *m* celo število in so koeficienti c_n kompleksna števila.

Zgled: Po metodi rodovnih funkcij smo rešili rekurzivno enačbo za Catalanova števila C_n

$C_0 = 1$, C_n = vsota $_{0 <= k <= n-1}$ $C_k\ C_{n-k-1}$ za *n* >= 1.

Ugotovili smo, da je *Gf(C,x)* = $(1 - (1 - 4x)^{1/2})/(2x)$ in da je

C_n = (2n nad n)/(n+1).

Linearne rekurzivne enačbe

V vektorskem prostoru zaporedij s kompleksnimi členi $C^N{}_0$ smo definirali *operator pomika E* in *linearni rekurzivni operator L reda d* s koeficienti $c_0, c_1, ..., c_d$: N_0 -> C, kjer c_d ni identično 0, takole:

L = vsota$_{0 <= k <= d}$ $c_k(n)$ E^k.

Izrek. Če je L linearni rekurzivni operator reda d, kjer je $c_d(n)$ <> 0 za vse n, je množica rešitev homogene linearne rekurzivne enačbe Ly = 0 (oziroma: jedro Ker L operatorja L) d-razsežen podprostor prostora $C^N{}_0$.

Trditev. Naj bo p ena od rešitev nehomogene enačbe $Ly = f$. Potem je množica vseh rešitev enačbe $Ly = f$ enaka p + Ker L.

Linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti

Definicija. Naj bo L = vsota$_{0 <= k <= d}$ c_k E^k linearni rekurzivni operator s konstantnimi koeficienti $c_0, c_1, ..., c_d$ iz C, kjer je c_0c_d <> 0. Potem enačbo $Ly = f$ imenujemo *linearna rekurzivna enačba reda d s konstantnimi koeficienti*.

Definicija. Zaporedje a iz $C^N{}_0$ je *C-rekurzivno*, če zadošča kakšni homogeni linearni rekurzivni enačbi s konstantnimi koeficienti.

Izrek. Za a iz $C^N{}_0$ so naslednje trditve enakovredne:

(i) a je C-rekurzivno zaporedje,
(ii) obstajata polinoma p, q iz $C[x]$, tako da je st(p) < st(q), q(0) <> 0 in $Gf(a,x) = p(x)/q(x)$,
(iii) obstajajo r iz N, polinomi $p_1, ..., p_r$ iz $C[n]$ in od 0 različna kompleksna števila $lambda_1, ..., lambda_r$, tako da za vse n iz N_0 velja:
a_n = vsota $_{1 <= i <= r}$ $p_i(n)$ $lambda_i{}^n$.

Zapisali smo postopek za konstrukcijo splošne rešitve homogene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti Ly = 0.

Ugotovili smo, da je kompozitum linearnih rekurzivnih operatorjev L_1 in L_2 s konstantnimi koeficienti linearni rekurzivni operator, ki ga dobimo, če L_1 in L_2 zmnožimo kot polinoma spremenljivke E. Od tod sledi, da je komponiranje linearnih rekurzivnih operatorjev s konstantnimi koeficienti komutativno.

Za nehomogeno linearno rekurzivno enačbo s konstantnimi koeficienti $Ly = f$, kjer je $f(n) = p(n)$ $lambda^n$ in je $p(n)$ polinom stopnje r, *lambda* pa ničla karakterističnega polinoma operatorja L stopnje s >= 0, smo pokazali, da ima rešitev oblike $n^sP(n)$ $lambda^n$, kjer je $P(n)$ polinom stopnje <= r. Zapisali smo postopek za konstrukcijo splošne rešitve takšne enačbe.