Diskretna matematika 1 (MAT) - domača naloga 2, 8. marec 2012

Rešitev 2. domače naloge

1. naloga

Koliko je različnih konfiguracij po štirih potezah igre *križci in krožci* (na polju 3×3 sta dva križca in dva krožca)?

Rešitev. Za prvo potezo je 9 možnosti, za drugo 8, za tretjo 7 in četrto 6. Vendar pa z zamenjavo prve in tretje poteze dobimo isto konfiguracijo, prav tako z zamenjavo druge in četrte poteze dobimo isto konfiguracijo. Torej je

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4} = 756$$

različnih konfiguracij po štirih potezah.

2. naloga

Dane so množice točk

$$A_1 = \{(i, 0); 1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{Z}\}, \quad A_2 = \{(0, j); 1 \leq j \leq 5, j \in \mathbb{Z}\} \quad \text{in} \quad A = A_1 \cup A_2.$$

Koliko različnih trikotnikov z oglišči iz množice A lahko sestavimo?

Rešitev. Vsa tri oglišča trikotnika ne morejo ležati v množici A_1, prav tako pa ne morejo ležat v množici A_2. Lahko izberemo dve oglišči iz množice A_1 in eno oglišče iz množice A_2. To lahko storimo na $\binom{10}{2} \cdot 5$ načinov. Dve oglišči iz množice A_2 in eno oglišče iz množice A_1 pa lahko izberemo na $\binom{5}{2} \cdot 10$ načinov. Po pravilu vsote lahko torej sestavimo $\binom{10}{2} \cdot 5 + \binom{5}{2} \cdot 10 = 45 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 325$ različnih trikotnikov.

3. naloga

Profesor je predaval n let. Vsako leto je povedal na predavanjih k anekdot. Vsaj koliko anekdot je moral poznati, če v dveh različnih letih ni povedal istih k anekdot? Rešite nalogo še za primer $n = 10$ in $k = 4$.

Rešitev. Naj bo x število anekdot, ki jih profesor pozna. Potem mora veljati $n \leq \binom{x}{k}$. V primeru $k = 4$ in $n = 10$ imamo $10 \leq \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$ oziroma $x(x-1)(x-2)(x-3) \geq 240$. Ker je $5(5-1)(5-2)(5-3) = 120$ in $6(6-1)(6-2)(6-3) = 360$, vidimo, da je x vsaj 6. Torej je moral profesor poznati vsaj 6 anekdot.

4. naloga

Na koliko načinov lahko postavimo k trdnjav na šahovnico dimenzije $m \times n$ tako, da se paroma ne napadajo?

Rešitev. Premišljujemo lahko takole:

1. Izberemo k stolpcev izmed n, na katere postavimo trdnjave. To lahko storimo na $\binom{n}{k}$ načinov.
2. Izberemo k vrstic izmed m, na katere postavimo trdnjave. To lahko storimo na $\binom{m}{k}$ načinov.
3. Imamo k^2 presečišč, na katera postavimo trdnjave. V 1. vrstici si lahko izberemo k pozicij, v 2. vrstici $k-1$ pozicij, v 3. vrstici $k-2$ pozicij, itd. Skupaj torej $k!$ možnosti (po vrsticah lahko izbiramo neodvisno).

Izbire v prejšnjih točkah so med sabo neodvisne, zato imamo skupaj (po pravilu produkta)

$$\binom{n}{k}\binom{m}{n}k!$$

možnosti.