Diskretna matematika 1 (MAT) - domača naloga 5, 29. marec 2012

Delne rešitve 5. domače naloge

1. naloga

Koliko je besed dolžine 13 nad abecedo s 25 črkami, če

- vsaka beseda vsebuje vseh pet samoglasnikov,
- se začne in konča s soglasnikom in
- med dvema soglasnikoma je natanko en samoglasnik?

Rešitev. V vsaki besedi se soglasniki in samoglasniki izmenjujejo. S soglasnikom začnemo, zato je v besedi 7 soglasnikov, ki jih izmed 20 soglasnikov lahko izberemo na 20^7 načinov. Samoglasnikov v besedi je 6, vsak od petih samoglasnikov nastopa vsaj enkrat. Lahko si mislimo, da imamo 5 celic (samoglasnikov), ki so označene. Elementi so mesta samoglasnikov, ki so tudi označeni. Ker moramo uporabiti vse samoglasnike, celice ne smejo biti prazne. Takšnih porazdelitev je torej $5!\,S(6,5) = 120 \cdot 15 = 1800$.

2. naloga

Na koliko načinov lahko razdelimo 7 jabolk in 6 pomaranč med 4 otroke, da bo vsak otrok dobil vsaj eno jabolko?

Rešitev. Posebej preštejmo porazdelitve jabolk in pomaranč. Množico jabolk slikamo v množico otrok, jabolk ne razlikujemo, otroke razlikujemo, štejemo surjektivne funkcije. Imamo torej $\binom{7-1}{7-4} = \binom{6}{3} = 20$ načinov za razdelitev jabolk.

Podobno lahko 6 pomaranč razdelimo na $\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$ načinov; tukaj štejemo vse funkcije, ki slikajo pomaranče v otroke, ne samo surjektivnih.

Po pravilu produkta je vseh načinov $20 \cdot 84 = 1680$.

3. naloga

Na koliko načinov lahko 8 (enakih) jabolk razdelimo v 4 različne škatle tako, da v nobeni škatli nista natanko dve jabolki?

Rešitev. Naj bo A_i množica takih razporeditev jabolk, da sta v i-ti škatli natanko dve jabolki. Iščemo $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, kjer je U množica vseh možnih razporeditev v 8 jabolk v 4 škatle. Za izračun moči unije bomo uporabili formulo vključitev in izključitev. Najprej izračunajmo moči presekov:

$$\begin{aligned}
|U| &= \binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{3} = 165 \\
|A_i| &= \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{2} = 28 \\
|A_i \cap A_j| &= \binom{4+2-1}{4} = \binom{5}{1} = 5 \\
|A_i \cap A_j \cap A_k| &= 1 \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= 1\,.
\end{aligned}$$

Rezultat je potem

$$165 - \binom{4}{1} \cdot 28 + \binom{4}{2} \cdot 5 - \binom{4}{3} \cdot 1 + 1 = 80\,.$$

4. naloga

Koliko je celoštevilskih rešitev enačbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18,$$

če za $1 \leq i \leq 4$ velja $2 \leq x_1 \leq 6$, $-2 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 6$, $3 \leq x_4 \leq 8$?

Nasvet: vpeljite nove spremenljivke $y_i \geq 0$.

Rešitev. Uvedemo nove spremenljivke

$$y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2 + 2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4 - 3.$$

Veljati mora

$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 6,\ 0 \leq x_4 \leq 5 \ \text{ in } \ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15.$$

Naj bo A_1 množica rešitev, pri katerih je $y_1 \geq 5$, A_2 množica rešitev, pri katerih je $y_2 \geq 4$, A_3 množica rešitev, pri katerih je $y_3 \geq 7$ in A_4 množica rešitev, pri katerih je $y_4 \geq 6$. Iščemo $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, kjer je U množica vseh možnih nenegativnih celoštevilskih rešitev enačbe. Za izračun moči unije bomo uporabili formulo vključitev in izključitev. Najprej izračunajmo moči presekov:

$$\begin{aligned}
|U| &= \binom{4+15-1}{15} = \binom{18}{3} = 816 \\
|A_1| &= \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{3} = 286 \\
|A_2| &= \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{3} = 364 \\
|A_3| &= \binom{4+8-1}{8} = \binom{11}{3} = 165 \\
|A_4| &= \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{3} = 220 \\
|A_1 \cap A_2| &= \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{3} = 84 \\
|A_1 \cap A_3| &= \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 \\
|A_1 \cap A_4| &= \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{3} = 35 \\
|A_2 \cap A_3| &= \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{3} = 35 \\
|A_2 \cap A_4| &= \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{3} = 56 \\
|A_3 \cap A_4| &= \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10 \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_4| &= 1,
\end{aligned}$$

ostali večkratni preseki pa so prazni. Rezultat je potem

$$816 - (286 + 364 + 165 + 220) + (84 + 20 + 35 + 35 + 56 + 10) - 1 = 20.$$

5. naloga

Na koliko načinov lahko izberemo 10 žog iz kupa rdečih, modrih in zelenih žog (vsake barve žog je najmanj 10)

(a) v splošnem?

(b) če moramo izbrati vsaj 5 rdečih žog?

(c) če smemo izbrati največ 5 rdečih žog?

Pri tej nalogi žog iste barve med sabo ne ločimo.

Rešitev. Žoge (10) porazdelimo v 3 celice (barve). Celice so označene, elementi niso označeni, celice so lahko prazne.

(a) Imamo $\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$ načinov.

(b) Izberemo najprej 5 rdečih žog, nato izbiramo še 5 žog izmed vseh. To lahko storimo na $\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$ načinov.

(c) Izmed vseh možnosti (66) odštejmo tiste, pri katerih smo izbrali vsaj 6 rdečih žog. Če izberemo 6 rdečih žog, moramo izbrati še 4. To lahko storimo na $\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$ načinov. Največ 5 rdečih žog lahko torej izberemo na $66 - 15 = 51$ načinov.