Diskretna matematika 1 (MAT) - domača naloga 3, 15. marec 2012

Rešitev 3. domače naloge

1. naloga

Na koliko načinov lahko permutiramo črke O, B, Z, O, R, I, L, U, N, A, S, I, J, E

(a) brez dodatnih omejitev?

(b) tako, da je A vedno pred Z?

(c) tako, da ni dveh zaporednih O-jev?

(d) tako, da soglasniki nastopajo po abecednem vrstnem redu?

Rešitev. Imamo štirinajst črk, dve od njih (O, I) se pojavita po dvakrat.

(a) Vseh permutacij je enako $x = \dfrac{14!}{2!\,2!}$.

(b) Rešitev je $x/2$, saj vsaki permutaciji, pri kateri je A pred Z ustreza natanko ena, pri kateri je Z pred A.

(c) Od vseh permutacij odštejemo tiste z dvema zaporednima O-jema. Permutacij brez dveh zaporednih O-jev je tako $x - \dfrac{13!}{2!}$

(d) Imamo 7 soglasnikov, vsi so različni. Vseh permutacij 7 soglasnikov je 7!, toda samo pri eni so soglasniki urejeni po abecedi. V tem primeru imamo torej $x/7!$ permutacij.

2. naloga

Koliko števil med 1001 in 2000 je deljivih vsaj z enim od števil 6, 7 ali 10?

Rešitev. Poglejmo, koliko števil med 1 in 2000 je deljivih vsaj z enim od števil 6, 7 ali 10 in od tega števila odštejmo število tistih, ki so manjša od 1001. Definirajmo množice
A'_6 množica števil med 1 in 2000, ki so deljiva s 6,
A'_7 množica števil med 1 in 2000, ki so deljiva s 7 in
A'_{10} množica števil med 1 in 2000, ki so deljiva s 10.
Iščemo moč množice $A'_6 \cup A'_7 \cup A'_{10} - A_6 \cup A_7 \cup A_{10}$.

Velja:

$$\begin{aligned}
|A'_6| &= \lfloor \frac{2000}{6} \rfloor = 333, \\
|A'_7| &= \lfloor \frac{2000}{7} \rfloor = 285, \\
|A'_{10}| &= \lfloor \frac{2000}{10} \rfloor = 200, \\
|A'_6 \cap A'_7| &= \lfloor \frac{2000}{42} \rfloor = 47, \\
|A'_6 \cap A'_{10}| &= \lfloor \frac{2000}{30} \rfloor = 66, \\
|A'_7 \cap A'_{10}| &= \lfloor \frac{2000}{70} \rfloor = 28, \\
|A'_6 \cap A'_7 \cap A'_{10}| &= \lfloor \frac{2000}{210} \rfloor = 9.
\end{aligned}$$

Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$|A'_6 \cup A'_7 \cup A'_{10}| = 333 + 285 + 200 - 47 - 66 - 28 + 9 = 686$$

in

$$|A'_6 \cup A'_7 \cup A'_{10}| - |A_6 \cup A_7 \cup A_{10}| = 686 - 342 = 344.$$

3. naloga

Koliko števil med 1 in 1000, ki so

(a) deljiva s 6 in niso deljiva z 10?

(b) deljiva z 8 in niso deljiva z 10?

(c) deljiva s 6 ali 8, a niso deljiva z 10?

Rešitev. Naj bo
A_6 množica števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 6,
A_8 množica števil med 1 in 1000, ki so deljiva z 8,
A_{10} množica števil med 1 in 1000, ki so deljiva z 10,
A množica števil med 1 in 1000, ki so deljiva s 6 in niso deljiva z 10 in
B množica števil med 1 in 1000, ki so deljiva z 8 in niso deljiva z 10.

(a) Iščemo $|A|$. Ker je $A = A_6 - A_6 \cap A_{10}$, velja

$$|A| = |A_6| - |A_6 \cap A_{10}| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 166 - 33 = 133.$$

(b) Iščemo $|B|$. Ker je $B = A_8 - A_8 \cap A_{10}$, velja

$$|A| = |A_8| - |A_8 \cap A_{10}| = \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{40} \rfloor = 125 - 25 = 100.$$

(c) Iščemo $|A \cup B|$. Poznamo že $|A|$ in $|B|$, potrebujemo pa še $A \cap B$. Podobno kot pri prejšnjih dveh točkah izračunamo

$$|A \cap B| = \lfloor \frac{1000}{24} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor = 41 - 8 = 33.$$

Po pravilu vključitev in izključitev dobimo

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 133 + 100 - 33 = 200.$$

4. naloga

V anketi je sodelovalo 100 dijakov. Iz njihovih odgovorov izvemo, da jih

- 32 zanima matematika,
- 20 zanima fizika,
- 45 zanima biologija,
- 15 zanima matematika in biologija,
- 7 zanima matematika in fizika,
- 10 zanima fizika in biologija,
- 30 ne zanima nobeden od teh predmetov.

Določite število dijakov, ki jih zanima natanko eden od teh treh predmetov.

Rešitev. Označimo z x število dijakov, ki jih zanimajo vsi trije predmeti, množice A, B in C pa naj vsebujejo dijake, ki jih zanima matematika, fizika oziroma biologija. Potem po pravilu vključitev in izključitev velja

$$\begin{aligned} x = |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 70 - 32 - 20 - 45 + 15 + 7 + 10 = 5. \end{aligned}$$

Samo matematika zanima

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + x = 32 - 15 - 7 + 5 = 15$$

dijakov, samo fizika zanima

$$|B| - |B \cap A| - |B \cap C| + x = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$$

dijakov in samo biologija zanima

$$|C| - |C \cap A| - |C \cap B| + x = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$$

dijakov. Točno eden od predmetov zanima $15 + 8 + 25 = 48$ dijakov.

5. naloga

Koliko besed lahko sestavimo iz črk A,A,B,B,C,C tako, da v nobeni besedi črka A ni hkrati na 1. in 2. mestu, B ni na 3. mestu in C ni hkrati na 4. in 5. mestu.

Rešitev. Od vseh besed bomo odšteli tiste, pri katerih je A na 1. in 2. mestu ali B na 3. mestu ali C na 4. in 5. mestu.

Naloge se lotimo s formulo vključitev in izključitev. Označimo

U ... množica vseh besed iz črk A,A,B,B,C,C.

A ... množica besed, pri katerih je A na 1. in 2. mestu.

B ... množica besed, pri katerih je B na 3. mestu.

C ... množica besed, pri katerih je C na 4. in 5. mestu.

Iščemo $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |U| - |A \cup B \cup C|$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} |U| &= \tfrac{6!}{2!2!2!} = 90 \\ |A| &= \tfrac{4!}{2!2!} = 6 \\ |B| &= \tfrac{5!}{2!2!} = 30 \\ |C| &= \tfrac{4!}{2!2!} = 6 \\ |A \cap B| &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\ |A \cap C| &= 1 \\ |B \cap C| &= \tfrac{3!}{2!} = 3 \\ |A \cap B \cap C| &= 1 \end{aligned}$$

Rezultat je

$$|U| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) = 54\,.$$

6. naloga

Poslovodja trgovskega centra v turističnem kraju je opazil, da je med kupci veliko tujcev. Sklenil je poslati vseh 20 prodajalcev na tečaje tujih jezikov. Vsak prodajalec se mora naučiti enega jezika izmed 9 izbranih, vsakega od teh 9 jezikov se mora naučiti vsaj po en prodajalec. Na koliko načinov se lahko prodajalce pošlje na tečaje tujih jezikov? Nalogo rešite z uporabo pravila vključitev in izključitev.

Rešitev. Oštevilčimo 9 jezikov s številkami $1, 2, \ldots, 9$. Vseh možnih razporeditev prodajalcev na tečaje je 9^{20}. Razporeditev, kjer se jezika i ne uči nihče, je 8^{20}. Razporeditev, kjer se jezika i in j ne uči nihče je 7^{20}. Razporeditev, kjer se jezika i, j in k ne uči nihče je 6^{20} in tako naprej. Po pravilu vključitev in izključitev je iskano število enako

$$9^{20}-\binom{9}{1}8^{20}+\binom{9}{2}7^{20}-\binom{9}{3}6^{20}+\binom{9}{4}5^{20}-\binom{9}{5}4^{20}+\binom{9}{6}3^{20}-\binom{9}{7}2^{20}+\binom{9}{8}1^{20}=4.36\cdot 10^{18}.$$

7. naloga

Koliko je števil med 1 in 10^9, katerih desetiški zapis vsebuje niz 123?

Rešitev. Z A_i označimo množico vseh 9-mestnih števil, pri katerih se niz 123 začne na mestu i za $i = 1, 2, \ldots, 7$. Pri številih, ki so manjša, si lahko predstavljamo, da imajo na začetku ustrezno število ničel. Izračunajmo moči $|A_i|$ in moči vseh presekov:

$$\begin{aligned}
|A_i| &= 10^6 \quad \text{(3 mesta so določena)} \\
|A_i \cap A_j| &= \begin{cases} 0; & |i-j| \leq 2 \\ 10^3; & |i-j| \geq 3 \quad \text{(6 mest je določenih)} \end{cases} \\
|A_i \cap A_j \cap A_k| &= 0 \quad \text{razen za} \quad \{i,j,k\} = \{1,4,7\}.
\end{aligned}$$

Po pravilu vključitev in izključitev je torej

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 = 7 \cdot 10^6 - 10 \cdot 10^3 + 1 = 6990001,$$

saj imamo 10 nepraznih dvojnih presekov.