Diskretna matematika 1 (MAT) - domača naloga 1, 1. marec 2012

Rešitev 1. domače naloge

1. naloga

Koliko je različnih besed dolžine 3, sestavljenih iz črk A, B, C, D, E in F, če

(a) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk E in F?

(b) ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk E in F?

(c) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo črko E in črko F?

(d) ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo črko E in črko F?

Rešitev. (a) Od števila vseh besed odštejemo število besed brez E in F:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$$

(b) Od števila vseh besed odštejemo število besed brez E in F:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 152.$$

(c) Črki E in F lahko v besedo postavimo na 6 načinov: EF-, FE-, E-F, F-E, -EF, FE-, za preostalo mesto imamo 4 možnosti, torej imamo skupaj $6 \cdot 4 = 24$ različnih besed.

(d) Prejšnjim možnostim prištejemo še tiste, v katerih E ali F nastopa po dvakrat. Takšnih možnosti je 6: EEF, EFE, FEE, FFE, FEF, EFF. Torej imamo $24 + 6 = 30$ možnosti.

2. naloga

Naj bo

$$A = \{(i,j);\ i,j \in \mathbb{N},\ 20 \leq i,j \leq 40\} \quad \text{in} \quad B = \{(i,j) \in A;\ i+j \ \text{ je sodo število}\}.$$

Koliko elementov ima množica B?

Rešitev. Vsota dveh števil je soda, če sta obe števili sodi ali obe lihi. Najprej poglejmo možnost, ko sta obe števili sodi. Sodih števil med 20 in 40 je 11. Torej lahko v paru (i,j) izberemo i na 11 načinov in j na 11 načinov. Po pravilu produkta imamo torej $11 \cdot 11 = 121$ takšnih parov.

Podobno razmišljamo, ko sta obe števili lihi. Lihih števil med 20 in 40 je 10. Torej lahko v paru (i,j) izberemo i na 10 načinov in j na 10 načinov. Po pravilu produkta imamo torej $10 \cdot 10 = 100$ takšnih parov.

Množica B ima torej po pravilu vsote $121 + 100 = 221$ elementov.

3. naloga

Ob železniški progi je k postaj. Koliko različnih vozovnic je treba pripraviti, da jih bodo imeli na razpolago za vse relacije (v obe smeri)? Kaj pa, če se mora vsak potnik peljati vsaj dve postaji?

Rešitev. Izbrati moramo začetno in končno postajo. To lahko storimo na $k \cdot (k-1)$ načinov. Imamo torej $k \cdot (k-1)$ različnih vozovnic.

Za število vozovnic, kjer se vsak potnik pelje vsaj dve postaji, od vseh vozovnic odštejemo tiste za eno postajo. Teh pa je $2 \cdot (k-1)$, saj lahko za vsako smer na $k-1$ načinov izberemo začetno postajo, končna pa je s tem že določena. Imamo torej $k \cdot (k-1) - 2 \cdot (k-1)$ ustreznih vozovnic.

4. naloga

Koliko je n-mestnih desetiških številk, ki vsebujejo natanko eno enko?

Rešitev. Ločimo primera, ko je enica na prvem mestu in ko ni. Če je enica na prvem mestu, je potem na preostalih $n-1$ mestih lahko katera koli od preostalih devetih števk. Takih možnosti je torej 9^{n-1}. Če enica ni na prvem mestu, potem je na prvem mestu ena od preostalih števk razen ničle, torej 8 možnosti. Izmed preostalih $n-1$ mest moramo izbrati eno mesto, na katerem je enica. To lahko naredimo na $n-1$ načinov. Na preostalih $n-2$ mestih se lahko pojavijo vse števke razen 1. Takih možnosti je torej $8(n-1) \cdot 9^{n-2}$. Skupaj imamo torej $9^{n-1} + 8(n-1) \cdot 9^{n-2}$ desetiških številk, ki vsebujejo natanko eno enko.

5. naloga

Koliko je različnih 0/1 matrik z m vrsticami in n stolpci? Kaj pa, če so vse vrstice različne?

Rešitev. Matrika ima $m \cdot n$ elementov, vsakega lahko izberemo na 2 načina, torej imamo $2^{m \cdot n}$ različnih 0/1 matrik.

Prvo vrstica ima n elementov, zato jo lahko izberemo na 2^n načinov. Za drugo vrstico imamo eno možnost manj, torej $2^n - 1$, za tretjo dve možnosti manj, $2^n - 2$... Takšnih matrik je po pravilu produkta torej $2^n(2^n-1)(2^n-2)\dots(2^n-m+1)$.

6. naloga

Naj bo A množica z n elementi.

(a) Koliko je vseh binarnih relacij na množici A?

(b) Koliko je vseh refleksivnih relacij na množici A?

(c) Koliko je vseh simetričnih relacij na množici A?

(d) Koliko je vseh refleksivnih in hkrati simetričnih relacij na množici A?

Nasvet: preštejte ustrezna matrike.

Rešitev. Binarno relacijo na množici A lahko predstavimo z binarno matriko, za vsako mesto izbiramo med dvema vrednostma (0/1).

(a) Izbiramo vseh n^2 elementov. Vseh relacij je torej 2^{n^2}.

(b) Relacija je refleksivna, če ima ustrezna matrika na diagonali same enice. Tako izbiramo elemente samo še na $n^2 - n$ mestih. Vseh izborov je tako 2^{n^2-n}

(c) Relacija je simetrična, če je ustrezna matrika simetrična. Torej je matrika enolično določena, če izberemo diagonalne elemente in tiste nad diagonalo, ki jih je $n(n+1)/2$. Vseh simetričnih relacij je torej $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(d) V tem primeru izbiramo samo elemente nad diagonalo, ki jih je $n(n-1)/2$. Vseh refleksivnih in hkrati simetričnih relacij je torej $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.