

Rekurzivne enačbe in rodovne funkcije

1. Naj bo a_n število nizov dolžine n iz znakov a, b, c , ki ne vsebujejo podniza ab . Zapišite rekurzivno enačbo za a_n , $n \geq 1$, in jo rešite. Nasvet: označite z b_n število nizov iz znakov a, b, c , ki ne vsebujejo podniza ab in se ne končajo z a . Zapišite sistem linearnih rekurzivnih enačb za a_n in b_n in ga rešite.

2. Pokažite, da velja

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n-k} x^k,$$

kjer je F_n n -to Fibonaccijevo število.

Nasvet: izračunajte na dva načina $a(x) \circ b(x)$, kjer je $a(x) = (1-x)^{-1}$ in $b(x) = x + x^2$. Nato upoštevajte, da je rodovna funkcija za Fibonaccijeva števila enaka

$$Gf(F, x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

3. Zapišite rodovno funkcijo za zaporedje $0, 1, 2, 3, 4, \dots$; $a_k = k$.
4. Označimo z a_k število načinov, na katere lahko (enake) kovance razporedimo v vrste tako, da je vsaka vrsta neprekinjena in se vsak kovanec v višji vrsti dotika natanko dveh kovancev v spodnji vrsti. Pri tem je v najnižji vrsti natanko k kovancev.
 - (a) Izračunajte a_1, a_2, a_3 in a_4 .
 - (b) Pokažite, da velja rekurzivna zveza

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)a_j + 1.$$

- (c) Poiščite rodovno funkcijo za zaporedje (a_n) .
5. *Motzkinovo število* M_n je enako številu načinov, na katere lahko narišemo tetive na krogu med n danimi točkami tako, da poljubni dve tetivi nimata nobene skupne točke.

Poiščite rodovno funkcijo za Motzkinova števila.