

Nehomogene linearne rekurzivne enačbe, rodovne funkcije

1. Rešite linearno rekurzivno enačbo

$$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 2n + 1$$

z začetnimi pogoji $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

2. Zapišite rodovne funkcije za naslednja zaporedja:

(a) $1, 1, 1, 1, 1, \dots$,

(b) $1, 0, 0, 0, \dots$,

(c) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$,

(d) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$,

(e) $1, 2, 3, 3, 3, 3, \dots$,

(f) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$,

(g) $1, n, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$.

3. Naj bo $A(x)$ rodovna funkcija zaporedja (a_n) . Poiščite rodovne funkcije za zaporedja (p_n) , (q_n) in (r_n) , ki so definirana takole:

(a) $p_n = 2a_n$,

(b) $q_n = a_n + 2$,

(c) $r_0 = r_1 = 0$, $r_n = a_{n-2}$ za $n \geq 2$.

4. S pomočjo rodovnih funkcij rešite rekurzivno enačbo

$$a_{n+1} - 2a_n = 4^n \quad (n \geq 0),$$

kjer je $a_0 = 1$.

5. Zapišite rodovne funkcije za število particij števila n

(a) na sumande velikosti tri,

(b) na sumande velikosti pet,

(c) na sumande velikosti tri ali pet.

6. Na koliko načinov lahko izplačamo znesek 13 EUR s kovanci in bankovci po 1, 2, 5, 10 EUR? Nasvet: zapišite rodovno funkcijo za izplačilo zneska n EUR s kovanci in bankovci po 1, 2, 5, 10 EUR.

7. Na koliko načinov lahko razdelimo 24 jabolk med 4 otroke tako, da vsak otrok dobi vsaj 3 a ne več kot 8 jabolk? Rešite z uporabo rodovnih funkcij.

8. Poiščite rodovno funkcijo $F(x)$ izbire n žog s kupa dveh zelenih, treh belih in ene modre žoge.

9. Koliko je dvojiških dreves s korenem na n vozliščih?

10. Naj bo a_n število načinov, na katere lahko v konveksen $(n + 2)$ -kotnik narišemo $n - 1$ diagonal, ki se med sabo ne sekajo (s tem $(n + 2)$ -kotnik *trianguliramo*). Pokažite, da je a_n enak n -temu Catalanovemu številu za $n \geq 1$.