

Vaje iz diskretne matematike 23. marca 2011

1. Koliko različnih besed dolžine 17 lahko sestavimo iz slovenske abecede s 25 znaki, če mora beseda vsebovati vseh 5 samoglasnikov, začne se s soglasnikom in med vsakima dvema soglasnikoma je natanko en samoglasnik?

2. (Kolokvij 2009) Naj bo

$$a(n, m) = \sum_{k=m}^n \binom{n}{k} S(k, m).$$

Ugani in dokaži splošno formulo za $a(n, m)$.

3. (Kolokvij 2010) Na koliko načinov lahko razvrstimo 9 prstanov na 4 prste desne roke (brez palca), če

- (a) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, prsti so lahko tudi prazni;
- (b) vrstni red prstanov na prstu ni pomemben, na vsakem prstu pa mora biti vsaj en prst;
- (c) vrstni red prstanov na prstu je pomemben, prsti so lahko tudi prazni;
- (d) vrstni red prstanov na prstu je pomemben in na vsakem prstu mora biti vsaj en prst?

4. Izračunaj vsoti

$$\sum_{k=1}^n L(n, k)x^k \quad \text{in} \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} L(n, k)x^{\bar{k}},$$

kjer je $x^k = x(x-1) \cdots (x-k+1)$, $x^{\bar{k}} = x(x+1) \cdots x(x+k-1)$ in $L(n, k)$ označuje Lahovo število.

5. Na koliko načinov lahko razvrstimo n ljudi za k okroglih miz, če ne ločimo miz in ne ločimo zavrtenih postavitvev istih ljudi za dano mizo?

6. Izračunaj vsoto

$$\sum_{k=0}^n s(n, k)x^k,$$

kjer $s(n, k)$ označuje (nepredznačeno) Stirlingovo število prve vrste.

7. (Kolokvij 2009) Naj bo $d(n, k)$ število permutacij iz S_n brez fiksnih točk, ki se razcepijo na produkt k disjunktnih ciklov. Dokaži, da je

$$d(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} (-1)^i s(n-i, k-i).$$

8. Na koliko načinov lahko zapišemo število 9 kot vsoto nekaj naravnih števil? Vrstni red ni pomemben.