

Vaje iz diskretne matematike 18. maja 2011

1. Na zabavi je 13 ljudi. Vsak prinese 3 darila, ki bi jih rad zamenjal s tremi drugimi udeleženci zabave. Ali je to mogoče?
2. Dokaži, da v skupini dveh ali več ljudi lahko vedno najdemo dva, ki imata enako število prijateljev v tej skupini.
3. Dokaži, da za vsak graf G velja neenakost $\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$, kjer je $\delta(G)$ najmanjša, $\Delta(G)$ pa največja stopnja točke v grafu G .
4. Dokaži, da vsak graf G z vsaj eno povezavo vsebuje podgraf H , za katerega velja $\delta(H) > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|}$.
5. Naj bo G dvodelen regularen graf z vsaj eno povezavo. Dokaži, da sta množici dvodelnega razbitja G enako močni.
6. Dokaži, da ima graf na n točkah, ki nima trikotnikov, največ $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ povezav.
7. Naj bo G graf z n točkami in m povezavami.
 - (a) Dokaži, da je vsaka povezava $uv \in E(G)$ vsebovana v vsaj $\deg(u) + \deg(v) - n$ trikotnikih grafa G .
 - (b) Dokaži, da G vsebuje vsaj $\frac{m}{3n}(3m - n^2)$ trikotnikov.
8. Naj bo G graf z vsaj 6 točkami. Dokaži, da G ali njegov komplement vsebuje trikotnik.
9. Za vsak graf dokaži, da je bodisi povezan bodisi je njegov komplement povezan.
10. Naj bo G graf, za katerega je $\delta G \geq \frac{|V(G)|-1}{2}$. Dokaži, da je G povezan.