

# 1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 2

20. april 2012

Priimek in ime: \_\_\_\_\_

Vpisna št.: \_\_\_\_\_ Vrsta: \_\_\_\_\_ Kolona: \_\_\_\_\_

1. Naj bo

$$F_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k)x^n$$

rodovna funkcija za Stirlingova števila 2. vrste. Pokažite, da je

$$F_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)}, \quad \text{za } k \geq 1.$$

Pomagajte si z naslednjimi zvezami, ki veljajo za Stirlingova števila 2. vrste:  $S(n, k) = 0$  za  $k > n$ ,  $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ ,  $S(0, 0) = 1$  in  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$  za  $1 \leq k \leq n$ .

2. S pomočjo Ferrersovih diagramov pokažite, da je število particij naravnega števila  $n$  na natanko tri sumande enako številu particij  $n$  na števila, od katerih je največji sumand enak 3. Nato zapišite rodovno funkcijo za število particij naravnega števila  $n$  na natanko tri sumande. Za to rodovno funkcijo poiščite še koeficient pri  $x^{13}$ .

3. Naj bo  $n = 2t + 1$  in  $X = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_3$ . V množici blokov  $\mathcal{B}$  naj bodo vse podmnožice  $X$  naslednjih dveh tipov:

$$\{(x, 0), (x, 1), (x, 2)\}, \quad x \in \mathbb{Z}_n$$

in

$$\{(x, i), (y, i), ((t+1)(x+y), i+1)\}, \quad \text{za } x \neq y \text{ iz } \mathbb{Z}_n \text{ in } i \in \mathbb{Z}_3.$$

Pokažite, da je  $\mathcal{B}$  2-načrt in poiščite njegove parametre. Koliko blokov ima  $\mathcal{B}$ ? V koliko blokih je vsebovan vsak element množice  $X$ ?

Opomba:  $t + 1$  je tuj z  $n$ .

4. Naj bo  $A = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  množica različnih odprtih intervalov. Na množici  $A$  definiramo relacijo  $\preceq$  na naslednji način:  $(a, b) \preceq (c, d)$  natanko tedaj, ko je  $b \leq c$  ali  $a = c$  in  $b = d$ . Ni težko preveriti, da je  $P = (A, \preceq)$  delna urejenost.

(a) Kaj so verige v  $P$ ?

(b) Kaj so antiverige v  $P$ ?

(c) Pokažite, da imamo v  $A$  vsaj  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  paroma disjunktnih intervalov ali pa vsaj  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  intervalov z nepraznim presekom.

(d) Naj bo  $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ . Pošcite najmanjši realizator za  $P = (A, \preceq)$ .

*Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.*

*Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!*