# 1. kolokvij iz DISKRETNE MATEMATIKE 2

25. april 2013

Priimek in ime: ________________________________________

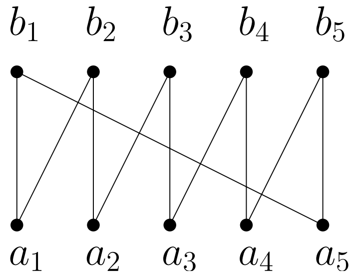
Vpisna št.: _______________ Vrsta: _______________ Kolona: _______________

**Navodilo: Rešite tri od spodnjih štirih nalog. Jasno označite, katere 3 naloge rešujete!**

1. Delna urejenost $P$ je podana s Hassejevim diagramom na spodnji sliki.

   (a) Poiščite realizator moči 3 za $P$.

   (b) Kolikšna je dimenzija $P$? Nasvet: preverite, koliko je neprimerljivih parov $(a_i, b_j)$ in kolikrat največ je lahko $a_i > b_j$ v linearni urejenosti.




2. *Premestitev* je permutacija brez fiksnih točk. Označimo z $d_n$ število premestitev iz $S_n$. Velja $d_0 = 1$ in $d_1 = 0$.

   (a) Poiščite čim bolj preprosto rekurzivno zvezo, ki ji ustrezajo števila $d_n$ (rekurzivna zveza bo drugega reda).

   (b) S pomočjo rekurzivne zveze dokažite, da eksponentna rodovna funkcija $F(x)$ zaporedja $(d_n)$ ustreza diferencialni enačbi $(1-x)F'(x) = xF(x)$, $F(0) = 1$.

   (c) S pomočjo točke (b) poiščite eksponentno rodovno funkcijo za zaporedje $(d_n)$.

3. Naj bo $\omega(n)$ število različnih praštevil, ki delijo $n$.

   (a) Dokažite, da je funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : n \mapsto 2^{\omega(n)}$ multiplikativna.

   (b) Dokažite, da velja
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$

4. Fiksirajmo naravno število $k$. Naj bo $a_n$ število permutacij iz $S_n$, katerih dolžine ciklov so vse deljive s $k$.

   (a) Izračunajte eksponentno rodovno funkcijo za zaporedje $(a_n)$.

   (b) S pomočjo točke (a) poiščite eksplicitno formulo za $a_n$.

*Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.*
*Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!*