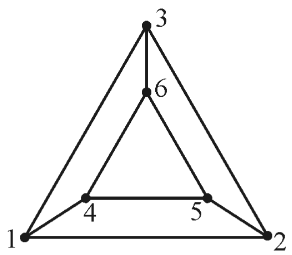
2. kolokvij/1. izpit iz DISKRETNE MATEMATIKE 2

6. junij 2013

1. (2. kolokvij)
   Elemente množice $X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ zložimo v kvadratno matriko
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$
   Za vsak x, $0 \leq x \leq 15$, definiramo blok B_x, ki vsebuje vse elemente, ki so v isti vrstici ali istem stolpcu matrike A kot x, razen x. Naj bo $\mathcal{B} = \{B_x;\ 0 \leq x \leq 15\}$. Pokažite, da je B načrt in poiščite njegove parametre. Ali je $\mathcal{B}$ tudi 2-načrt? Ali je $\mathcal{B}$ 3-načrt? V primeru pozitivnega odgovora tudi poiščite ustrezne parametre.

2. (skupna)
   Naj bo A grupa avtomorfizmov, ki deluje na vozliščih grafa G iz spodnje slike. Poiščite orbite vozlišč grafa G. Poiščite še stabilizator vozlišča 1 in izračunajte moč grupe A. S pomočjo cikličnega indeksa grupe A nato poiščite število neekvivalentnih barvanj vozlišč grafa G z dvema barvama.



3. (skupna)
   Naj bo G maksimalen zunanje ravninski graf na $n \geq 3$ vozliščih, vložen v ravnino tako, da so vsa vozlišča na robu zunanjega lica. Pokažite, da velja:
   (a) G je 2-povezan.
   (b) $\kappa(G) = 2$.
   (c) Vsa lica, razen zunanjega, so trikotniki.
   (d) G ima $2n - 3$ povezav.
   (e) G ima vsaj eno vozlišče stopnje 2.

4. (1. izpit)
   Množica intervalov iz $\mathbb{R}$ je *vgnezdena*, če za vsak par intervalov iz te množice velja, da je eden popolnoma vsebovan v drugem. Naj bo $\mathcal{I}$ množica intervalov iz $\mathbb{R}$ moči n, ki nima nobene vgnezdene podmnožice moči več kot k. Pokažite, da potem obstaja podmnožica $\mathcal{I}$ moči $\lceil n/k \rceil$, v kateri noben interval ne vsebuje drugega.

5. (1. izpit)
   Za $n \geq 1$ naj bo a_n število permutacij, ki vsebujejo samo cikle dolžine 2, b_n število permutacij, ki vsebujejo samo cikle dolžine 3, c_n število permutacij, ki vsebujejo samo cikle dolžine 2 ali 3 in d_n število permutacij, ki ne vsebujejo ciklov dolžine 2 ali 3.
   (a) Poiščite eksponentne rodovne funkcije za zaporedja (a_n), (b_n), (c_n) in (d_n).
   (b) S pomočjo eksponentne rodovne funkcije poiščite še linearno rekurzivno zvezo drugega reda, ki ji zadoščajo členi zaporedja (c_n).

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.
Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!