Trije klasični izreki

1. Naj bo zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n^2+1\}$. Pokažite, da tedaj to zaporedje vsebuje podzaporedje dolžine $n+1$, ki je monotono. Definirajte ustrezno delno urejenost in uporabite Dilworthov izrek.

   Opomba: nalog lahko enostavno rešimo tudi s pomočjo Dirichletovega načela.

2. Naj bo $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, kjer so p_i različna praštevila. Pokažite, da ima tedaj N kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ deliteljev, od katerih nobeden ne deli drugega.

   Nasvet: vsakemu delitelju priredite primerno množico in nato uporabite Spernerjev izrek.

3. Dana so realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki so vsa večja ali enaka 1. Pokažite, da tedaj obstaja kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ vsot oblike $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, a_i$, $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, ki so po absolutni vrednosti manjše od 1.

4. Pokažite, da ima vsak dvodelen regularen graf popolno prirejanje.

   Pokažite, da ima vsak dvodelen biregularen graf $G = (X \cup Y, E)$ popolno prirejanje iz X v Y, če je $|X| < |Y|$.

5. Oglejmo si naslednji trik s kartami. Prvi igralec dobi pet naključno izbranih kart iz kompleta 52 kart. Eno zadrži, štiri pa v izbranem vrstnem redu položi v kuverto. To kuverto dobi drugi igralec (ki je tačas lahko celo v drugi sobi) in ugotovi, katero karto je zadržal prvi igralec. Pokazati moramo, da se igralca lahko dogovorita, kako s štirimi kartami zakodirati informcijo, katero karto je obdržal prvi igralec.

   Torej, iščemo injektivno funkcijo, ki izboru a petih kart izmed 52 priredi urejeni izbor štirih kart. Pri tem morajo biti te štiri karte vsebovane v množici a.

6. Urejena m-terica $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ je *sistem različnih predstavnikov* za množice $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, če velja

   - $a_i \in S_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$ in
   - $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$.

   Pokažite, da sistem različnih predstavnikov za množice $S_1, S_2, \ldots, S_m$ obstaja natanko tedaj, ko ima unija poljubnih k množic vsaj k elementov za $k = 1, 2, \ldots, m$.