Metrična teorija grafov

1. Naj bosta u in v vozlišči grafa Q_n na razdalji k.
   (a) Poiščite $I(u,v)$ za $n=3$ in $k \in \{1,2,3\}$.
   (b) Poiščite $I(u,v)$ za poljuben n in poljuben $k \leq n$.

2. Pokažite, da je vsak konveksen podgraf tudi izometričen. Pokažite, da obratno ni res: izometričen podgraf ni nujno konveksen.

3. Pokažite, da graf G z minimalno stopnjo $\delta(G) \geq 2$ vsebuje pot dolžine $\delta(G)$ in cikel dolžine vsaj $\delta(G)+1$.

4. (Domača naloga - težja) Pokažite, da povezan graf G vsebuje pot dolžine vsaj $\min\{2\delta(G), |V(G)|-1\}$. Nasvet: naj bo P najdaljša pot in predpostavimo, da P ni Hamiltonova pot (sicer že ima dolžino $|V(G)|-1$). Potem ne obstaja cikel, ki bi vseboval vsa vozlišča iz poti P.

5. Poiščite razdaljno particijo Petersenovega grafa
   (a) glede na eno vozlišče;
   (b) glede na dve vozlišči.

6. Na bo G graf z maksimalno stopnjo $\Delta(G) \leq d$, $d \geq 3$, in radijem $\mathrm{rad}(G) \leq k$. Pokažite, da ima G največ
$$\frac{d}{d-2}(d-1)^k$$
vozlišč.

7. Označimo
$$n_0(d,g) = \begin{cases} 1 + d\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i; & g = 2r+1, \\ 2\sum_{i=0}^{r-1}(d-1)^i; & g = 2r. \end{cases}$$
Naj bo G graf z minimalno stopnjo $d = \delta(G)$ in ožino g. Pokažite, da potem velja
$$|V(G)| \geq n_0(d,g).$$

8. Naj bo G graf z minimalno stopnjo vsaj 3 in ožino g. Pokažite, da velja
$$g < 2\log_2 |V(G)|.$$

9. Pokažite, da za poljuben povezan graf velja
$$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\mathrm{rad}(G).$$