

Metrična teorija grafov

1. Naj bo G graf s premerom d in m število različnih lastnih vrednosti matrike sosednosti grafa G . Pokažite, da velja $d \leq m - 1$.
2. Naj bo G regularen graf s stopnjo k . Pokažite, da je k lastna vrednost $A(G)$ z lastnim vektorjem $(1, 1, \dots, 1)^T$ in da je ečkratnost lastne vrednosti k je enaka številu povezanih komponent grafa G .
3. Naj bo G graf in λ lastna vrednost $A(G)$. Pokažite, da velja $|\lambda| \leq \Delta(G)$.
4. Naj bo G povezan graf. Pokažite, da je $\Delta(G)$ lastna vrednost $A(G)$ natanko tedaj, ko je G regularen.
5. Pokažite, da imata kospektralna grafa isto liho ožino.
6. Poiščite Wienerjev indeks naslednjih grafov:
 - (a) zvezd $K_{1,n}$ za $n \geq 3$,
 - (b) poti P_n za $n \geq 2$,
 - (c) ciklov C_n za $n \geq 3$,
 - (d) koles W_n za $n \geq 4$ in
 - (e) prizem $C_n \square P_2$ za $n \geq 3$.
7. Pokažite, da ima med vsemi drevesi z n povezavami zvezda $K_{1,n}$ najmanjši Wienerjev indeks. Pokažite, da ima med vsemi drevesi z n povezavami pot P_{n+1} največji Wienerjev indeks.