Particije naravnih števil, preštevanje s pomočjo rodovnih funkcij

1. Sestavite tabelo števil $p_k(n)$ za $n \in \{1, \dots 10\}$ in $k \in \{1, \dots 10\}$.

2. Zapišite vse particije števila 8 na 3 sumande.

3. Zapišite rodovne funkcije za število particij števila n

   (a) na sumande velikosti 3,

   (b) na sumande velikosti 5,

   (c) na sumande velikosti 3 ali 5,

   (d) na same različne sumande,

   (e) pri katerih se vsak sumand pojavi največ dvakrat,

   (f) pri katerih so vsi sumandi sodi,

   (g) pri katerih se vsak sumand pojavi sodo mnogokrat.

4. S pomočjo rodovnih funkcij pokažite

   (a) $p(n|\text{noben sumand se ne pojavi več kot dvakrat}) = p(n|\text{noben sumand ni deljiv s tri})$

   (b) $p(n|\text{noben sod sumand se ne pojavi več kot enkrat}) = p(n|\text{noben sumand ni deljiv s štiri})$

5. Na koliko načinov lahko izplačamo znesek 13 EUR s kovanci in bankovci po $1, 2, 5, 10$ EUR? Nasvet: zapišite rodovno funkcijo za izplačilo zneska n EUR s kovanci in bankovci po $1, 2, 5, 10$ EUR.

6. Poiščite rodovno funkcijo $F(x)$ izbire n žog s kupa dveh zelenih, treh belih in ene modre žoge.

7. Na koliko načinov lahko razdelimo 24 jabolk med 4 otroke tako, da vsak otrok dobi vsaj 3 a ne več kot 8 jabolk. Rešite z uporabo rodovnih funkcij.

8. Za vsako od spodnjih nalog zapišite ustrezne rodovne funkcije in ugotovite, kateri koeficient je treba izračunati, da rešite nalogo.

   Poiščite število celoštevilskih rešitev enačbe

   (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, kjer je $2 \leq x_i \leq 7$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, kjer je $0 \leq x_i$ za $i = 1, 2, 3, 4$ in sta vrednosti x_2 in x_3 sodi števili.

   (c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = n$, kjer je $x_i \geq 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

   (d) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = n$, kjer je $0 \leq x_1$, $4 \leq x_2, x_3$ in $5 \leq x_4$.

   Nasvet: najprej zapišite rodovne funkcije za vsako spremenljivko posebej.

9. S pomočjo Ferrersovih diagramov pokažite, da je $p_n(2n) = p(n)$. Bijekcijo med Ferrersovimi diagrami ilustrirajte tudi na enem konkretnem primeru za $n = 6$.

10. Pokažite, da je število sebi konjugiranih particij števila n enako številu particij števila n na različne lihe sumande. Poiščite vse sebi konjugirane particije števila 20. S pomočjo tega poiščite še vse particije števila 20 na različne lihe sumande.