

Rodovne funkcije

1. Poiščite potenčne vrste za

(a) $(2x - 3)^3$,

(b) $\frac{1}{x - 3}$,

(c) $\frac{1 + 2x + 2x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$.

Za zadnjo vrsto izračunajte še koeficient pri x^4 .

2. Zapišite rodovne funkcije za naslednja zaporedja:

(a) $1, 1, 1, 1, 1, \dots$,

(b) $1, 0, 0, 0, \dots$,

(c) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$,

(d) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$,

(e) $1, 2, 3, 3, 3, 3, \dots$,

(f) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$,

(g) $1, n, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$.

3. Naj bo $A(x)$ rodovna funkcija zaporedja (a_n) . Poiščite rodovne funkcije za zaporedja (p_n) , (q_n) in (r_n) , ki so definirana takole:

(a) $p_n = 2a_n$,

(b) $q_n = a_n + 2$,

(a) $r_n = a_{n+2}$.

4. S pomočjo rodovnih funkcij rešite rekurzivno enačbo

$$a_{n+1} - 2a_n = 4^n \quad (n \geq 0),$$

kjer je $a_0 = 1$.

5. S pomočjo rodovnih funkcij rešite sistem rekurzivnih enačb

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} &= 4a_n + 6b_n \end{aligned}$$

za $n \geq 0$, kjer je $a_0 = 1$ in $b_0 = 0$.

6. Koliko je dvojiških dreves s korenom na n vozliščih?

7. Označimo z d_n število deranžacij (to je permutacij brez fiksnih točk) iz S_n . Pokažite, da d_n zadošča rekurzivni zvezi

$$d_n = (n - 1)d_{n-1} + (n - 1)d_{n-2}.$$

8. Zapišite rodovno funkcijo za zaporedje $0, 1, 2, 3, 4, \dots$; $a_k = k$.

9. Izračunajte rodovno funkcijo za zaporedje a_n , podano z rekurzivno enačbo

$$n(n - 1)a_n + a_{n-2} = 0$$

in začetnima vrednostma $a_0 = 1, a_1 = 0$.