Diskretna matematika 2 - vaje 7, 12. april 2012

Trije klasični izreki

1. Pokažite, da ima vsak dvodelen regularen graf popolno prirejanje.
   Poiščite 3-regularen graf, ki nima popolnega prirejanja.

2. Urejena m-terica $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ je *sistem različnih predstavnikov* za množice $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, če velja

   - $a_i \in S_i$ za $i = 1, 2, \ldots, m$ in
   - $a_i \neq a_j$ za $i \neq j$.

   Pokažite, da sistem različnih predstavnikov za množice $S_1, S_2, \ldots, S_m$ obstaja natanko tedaj, ko ima unija poljubnih k množic vsaj k elementov za $k = 1, 2, \ldots, m$.

3. Matrika $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je *dvojno stohastična*, če velja

   - $a_{ij} \geq 0$ za $i, j = 1, \ldots, n$,
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ za $j = 1, \ldots, n$ in
   - $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ za $i = 1, \ldots, n$.

   Pokažite, da je vsaka dvojno stohastična matrika konveksna kombinacija permutacijskih matrik.

4. Naj bo zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ permutacija množice $\{1, 2, \ldots, n^2+1\}$. Pokažite, da tedaj to zaporedje vsebuje podzaporedje dolžine $n+1$, ki je monotono. Definirajte ustrezno delno urejenost in uporabite Dilworthow izrek.

   Opomba: nalog lahko enostavno rešimo tudi s pomočjo Dirichletovega načela.

5. Dana so realna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki so vsa večja ali enaka 1. Pokažite, da tedaj obstaja kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ vsot oblike $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, a_i$, $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, ki so po absolutni vrednosti manjše od 1.

6. (Domača naloga) Naj bo $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, kjer so p_i različna praštevila. Pokažite, da ima tedaj N kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ deliteljev, od katerih nobeden ne deli drugega.

   Nasvet: vsakemu delitelju priredite primerno množico in nato uporabite Spernerjev izrek.