

Logika in množice: 2. izpit

8. maj 2014

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Poišči preneksne normalne oblike naslednjih predikatnih formul. Pri primeru b) poišči zapis s samo dvema kvantifikatorjema.

a) $\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x) \implies \forall x : R(x)$

b) $\forall x : P(x) \implies \forall x : Q(x) \wedge \forall x : R(x)$

c) $\exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \implies \forall y : R(y)$

2. naloga (25 točk)

Dana sta štirimestna izjavna veznika

$$K(p, q, r, s) = p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$$

in

$$D(p, q, r, s) = p \vee q \vee r \vee \neg s.$$

a) Ali je nabor $\{K\}$ poln?

b) Ali je nabor $\{D\}$ poln?

c) Ali je nabor $\{K, D\}$ poln?

d) Izrazi negacijo $\neg p$ samo z veznikoma K in D .

3. naloga (25 točk)

Dane so množice $A_1, A_2, \dots, A_{2014}$ in sistem 2014 enačb z eno neznanko X :

$$A_1 \cup X = A_2 \cap A_3,$$

$$A_2 \cup X = A_3 \cap A_4,$$

\vdots

$$A_{2012} \cup X = A_{2013} \cap A_{2014},$$

$$A_{2013} \cup X = A_{2014} \cap A_1,$$

$$A_{2014} \cup X = A_1 \cap A_2.$$

Ugotovi, pod kakšnimi pogoji je sistem rešljiv, in ga v tem primeru tudi reši.

4. naloga (25+10 točk)

Naj bo $J = [0, 1) \cup [2, 3) \cup [4, 5)$. Poišči bijektivno preslikavo $f : J \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ in dokaži, da je res bijektivna.

(Za dodatne točke preslikavo konstruiraj kot zožitev neke linearne preslikave $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.)