Logika in množice: 1. poskusni izpit

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Na množici $S = \{1, 2, \ldots, 16\}$ definiramo relacijo $\preceq$ s predpisom

$$m \;\preceq\; n \iff \exists\, k \in \mathbb{N}_0 \,.\, m^k = n \;.$$

a) Narišite *lep in pregleden* Hassejev diagram delne ureditve $(S, \preceq)$.

b) Ali za vse $m, n \in S$ obstaja supremum $m \vee n$? Kaj pa infimum $m \wedge n$?

2. naloga

Na množici $\mathbb{R}$ definiramo relacijo $\sim$ s predpisom

$$x \sim y \iff \cos(x - y) = 1.$$

a) Preverite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.

b) Na faktorski množici $\mathbb{R}/{\sim}$ želimo definirati operaciji $\oplus$ in $\otimes$ s predpisoma

$$\begin{aligned}[x] \oplus [y] &= [x + y],\\ [x] \otimes [y] &= [x \cdot y].\end{aligned}$$

Ali sta s tema predpisoma $\oplus$ in $\otimes$ dobro definirani?

3. naloga

a) Naj bodo m, n in k naravna števila. Koliko je funkcij $f : [m] \to [n]$, za katere je moč množice $f^{-1}(\{0\})$ enaka k?

b) Izračunajte vrednost vsote

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^{n-k} \;.$$

4. naloga

Ali obstaja taka družina množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da je njen presek $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ prazen, hkrati pa je za vsak $m \in \mathbb{N}$ presek $\bigcap_{0\leq n\leq m} A_n$ neskočen?