Logika in množice: 6. poskusni izpit

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Ugotovi, katere izmed naslednjih izjav so med seboj ekvivalentne:

- $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \Rightarrow \alpha)$,
- $(\beta \Rightarrow \alpha) \wedge (\alpha \Rightarrow \neg\beta)$,
- β
- $\top$

2. naloga

Dokažite izjavo

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \,.\, \exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, n + k = 2^n,$$

pri čemer je potenciranje 2^n opredeljeno z aksiomoma

$$2^0 = 1 \qquad \text{in} \qquad 2^{n^+} = 2^n + 2^n.$$

V dokazu smete uporabljati Peanove aksiome, asociativnost seštevanja in množenja ter zgornja aksioma.

3. naloga

Na množici $\mathbb{R}$ je dana relacija $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$x \; S \; y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Z besedami: x in y sta v relaciji S, če je $x - y$ racionalno število. Relacija S je ekvivalenčna, česar ni treba posebej preverjati. Ali je kvocientna množica $\mathbb{R}/S$ števna?

4. naloga

Množica A je z relacijo $\leq$ dobro urejena. Naj bo B množica vseh *končnih* podmnožic množice A. Definirajte kako dobro urejenost na B in dokažite, da res je dobra urejenost.