Logika in množice: 1. kolokvij

11. december 2013

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Krajevna skupnost Domena Interpretacije[1] ima 100 prebivalcev, razdeljenih v tri vasi,[2] ki se imenujejo Hrib, Reka in Jezero.

Radi bi se pogovarjali o teh prebivalcih, zato vpeljemo enomestne predikatne simbole H, R, J, C, ki naj po vrsti izražajo lastnosti „je prebivalec Hriba“, „je prebivalec Reke“, „je prebivalec Jezera“ in „nosi čevlje“; ter dvomestni predikatni simbol P, pri čemer naj $P(x, y)$ pomeni „x pozna y“.

Naslednje trditve o prebivalcih Domene Interpretacije prevedi v jezik predikatnega računa:

a) Noben prebivalec Jezera ne nosi čevljev.

b) Vsak prebivalec Hriba pozna kakega prebivalca Reke.

c) Nekega prebivalca Hriba poznajo vsi prebivalci Reke.

d) Nekega prebivalca Reke, ki nosi čevlje, poznajo vsi prebivalci Jezera.

Recimo, da so vse trditve o prebivalcih Domene Interpretacije iz prejšnjih primerov resnične. Prevedi naslednje trditve v naravni jezik in ugotovi njihovo resničnost. (Dokazovanje ni potrebno.)

e) $\exists x : (J(x) \wedge \neg C(x))$

f) $\forall x : H(x) \Rightarrow \forall x : R(x)$

g) $\exists x \exists y : (C(x) \wedge H(y) \wedge P(x, y))$

2. naloga (30 točk)

Če je sklep veljaven, ga dokaži, sicer ga ovrzi s protiprimerom.

a) $p \vee q \vee r,\ q \vee r \vee s,\ r \vee s \vee t \ \models\ p \vee r \vee t$

b) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s),\ \neg r \wedge \neg s \ \models\ p$

c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\ p \vee r,\ q \wedge s,\ r \Rightarrow (s \Rightarrow t) \ \models\ t$

3. naloga (25+5 točk)

Definirajmo tromestni logični veznik $I(p, q, r)$ kot

$$I(p, q, r) \equiv p \wedge (q \vee r)$$

a) Dokaži, da nabor $\{I\}$ ni poln.

b) Dokaži, da je nabor $\{1, \oplus, I\}$ poln.

c) S pomočjo veznikov 1, $\oplus$ in I izrazi veznik $\not\Rightarrow$, kjer je $p \not\Rightarrow q \equiv \neg(p \Rightarrow q)$.
Za dodatne točke: poišči čimkrajši zapis, ki naj čimmanjkrat uporabi spremenljivki p in q.

d) Poišči veznik J, tako da bo $\{I, J\}$ poln nabor in $\{J\}$ ne bo poln nabor.

4. naloga (25 točk)

Dokaži sklep ali ga ovrzi s protiprimerom. Dokazov ni potrebno formalizirati.

a) $\forall x \forall y : (P(x) \wedge Q(y) \Leftrightarrow R(x, y)),\ \forall x \forall y : (R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \models \forall x : (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

b) $\forall x \forall y : (P(x) \wedge Q(y) \Leftrightarrow R(x, y)),\ \forall x \forall y : (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
$\models \exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x) \Rightarrow \forall x : (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$

---

[1] množica njenih prebivalcev naj bo tudi domena naše interpretacije

[2] vsaka vas ima vsaj enega prebivalca; vsak prebivalec je prebivalec natanko ene vasi