Logika in množice: 2. kolokvij

22. januar 2014

Čas reševanja je 120 minut. Vse odgovore utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (30 točk)

Dani sta množici A in B. Ugotovi, kdaj je enačba v spremenljivki X rešljiva, in v tem primeru poišči rešitev.

$$X \cup A = X \oplus B$$

Rešitev enačbe čim bolj poenostavi.

2. naloga (30 točk)

Naj bo P_n množica vseh premic v n-razsežnem prostoru $\mathbb{R}^n$. Na množici P_n definiramo relacijo

$$p \perp_n q \overset{\text{def}}{\iff} \text{premica } p \text{ je pravokotna na premico } q.$$

Premici sta pravokotni, ko se sekata v neki točki in sta pravokotna njuna smerna vektorja.

a) Kateri znani relaciji je enaka relacija $(\perp_2)^2$?

b) Katere od relacij $\perp_2$, $(\perp_2)^2$ in $(\perp_2)^+$ so ekvivalenčne? Zanje opiši ekvivalenčne razrede!

c) Opiši relacijo $(\perp_3)^2$ (ni potrebno podrobno utemeljevati, zakaj je taka)! Ali je ekvivalenčna? Če je, kateri so njeni ekvivalenčni razredi?

Namig: različni premici v $\mathbb{R}^3$ sta bodisi vzporedni, bodisi mimobežni, bodisi se sekata.

3. naloga (25 točk)

Naj bo P množica vseh polinomov p z realnimi koeficienti in lastnostjo $p(0) = 0$ in naj bo $P_1 \subseteq P$ množica vseh tistih elementov množice P, ki so stopnje največ 1. Na množici P definiramo relacijo

$$p \leq q \overset{\text{def}}{\iff} \exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : q(x) - p(x) \geq C.$$

Z istim predpisom definiramo relacijo $\leq_1$ na množici P_1.

a) Dokaži, da je $\leq$ relacija delne urejenosti.

Namig: preden se lotiš dokazovanja antisimetričnosti, se spomni, kateri polinomi imajo lastnost, da so hkrati navzgor in navzdol omejeni.

b) Iz prejšnje točke sledi, da je $\leq_1$ tudi relacija delne urejenosti. (Tega ni treba dokazovati.) Dokaži, da je poleg tega $\leq_1$ tudi simetrična. Kateri znani relaciji je enaka $\leq_1$?

4. naloga (25 točk)

Naj bodo W, X, Y in Z množice in naj bodo $f : W \to X$, $g : X \to Y$ ter $h : Y \to Z$ preslikave.

a) Denimo, da sta $g \circ f$ in $h \circ g$ injektivni. Dokaži, da je $h \circ g \circ f$ injektivna. S protiprimerom pokaži, da h ni nujno injektivna.

b) Denimo, da sta $g \circ f$ in $h \circ g$ surjektivni. Dokaži, da je $h \circ g \circ f$ surjektivna. S protiprimerom pokaži, da f ni nujno surjektivna.

c) Denimo, da sta $g \circ f$ in $h \circ g$ bijektivni. Dokaži, da so h, g, f in $h \circ g \circ f$ bijektivne.