**Izjavni račun**

4. 10. 2013

***Izjava*** je poved, ki je bodisi *resnična* (ima *resničnostno vrednost* 1) bodisi *neresnična* (ima *resničnostno vrednost* 0). Povedi "Koliko je ura?", "Pridi sem!" in "Ta poved ni resnična" torej niso izjave.

Po obliki delimo izjave na *osnovne* in *sestavljene*. Izjave sestavljamo z *izjavnimi vezniki,* ki so glede na to, koliko izjav povežejo v novo izjavo, *n*-mestni, kjer je *n* lahko enak 0, 1, 2, ... Pomembna zahteva, ki ji morajo zadoščati izjavni vezniki, je naslednja: Resničnostna vrednost sestavljene izjave mora biti enolično določena z resničnostnimi vrednostmi njenih sestavnih delov. To nam omogoča, da izjavne veznike definiramo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

Definirali smo naslednje veznike:

0-mestna veznika (oz. *logični konstanti*): 0 in 1

1-mestni veznik: negacija

2-mestni vezniki: konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalenca

Podobno kot v aritmetiki iz števil in spremenljivk z aritmetičnimi operacijami tvorimo *aritmetične izraze*, v izjavnem računu iz izjavnih konstant in izjavnih spremenljivk z izjavnimi vezniki sestavljamo ***izjavne izraze***. Podobno kot to velja za izjavne veznike, lahko tudi resničnostne vrednosti izjavnega izraza pri različnih vrednostih izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo, predstavimo v *resničnostni tabeli*.

Med izjavnimi izrazi so posebej pomembne ***tavtologije*** (izrazi, ki so resnični pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk) in ***protislovja*** (izrazi, ki so neresnični pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk). Izrazi, ki niso ne tavtologije ne protislovja, so *kontingentni*.

11. 10. 2013

Izjavna izraza *A* in *B* sta ***enakovredna***, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost. V tem primeru zapišemo: *A*∼*B*.

Sestavili smo seznam nekaterih pomembnih enakovrednosti izjavnega računa, ki nam omogočajo poenostavljanje izjavnih izrazov.

***Definicija.*** Končno zaporedje izjavnih izrazov *A*1,*A*2,…,*Ak*,*B* je ***pravilen***ali ***veljaven sklep*** ali ***pravilo sklepanja*** s *predpostavkami A1,A2,…,Ak* in *zaključkom B*, če je zaključek resničen pri vseh tistih naborih resničnostnih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke. V tem primeru rečemo, da zaključek ***logično* *sledi*** iz predpostavk, in pišemo: *A*1,*A*2,…,*Ak*⊨*B*.

Navedli smo nekaj *osnovnih pravil sklepanja* (*A,B,C* so poljubni izjavni izrazi):

1. *modus ponens* (MP):  Iz *A, A*⇒*B* logično sledi *B*.

2. *modus tollens* (MT):  Iz *A*⇒*B*, ¬*B* logično sledi ¬*A*.

3. *disjunktivni silogizem* (DS): Iz *A∨B*, ¬*B* logično sledi *A*.

4. *hipotetični silogizem* (HS): Iz *A⇒B, B⇒C* logično sledi *A⇒C*.

5. *poenostavitev* (Po): Iz *A∧B* logično sledi *A*.

6. *združitev* (Zd): Iz *A*, *B* logično sledi *A∧B*.

7. *pridružitev* (Pr): Iz *A* logično sledi *A∨B*.

***Pravilnost*** sklepa s predpostavkami *A*1,*A*2,…,*Ak* in zaključkom *B* lahko dokažemo z resničnostno tabelo, ali pa (ponavadi veliko hitreje!) s konstrukcijo *končnega zaporedja izjavnih izrazov* *B*1,*B*2,…,*Bn*, kjer je *Bn*=*B*, za *i*=1,2,…,*n* pa velja:

a) *Bi* je ena od predpostavk *A*1,*A*2,…,*Ak*, ali

b) *Bi* je tavtologija, ali

c) *Bi*∼*Bj* za neki *j*<*i*, ali

d) *Bi* logično sledi iz *B*1,*B*2,…,*Bi*−1 po enem od osnovnih pravil sklepanja.

***Nepravilnost*** sklepa s predpostavkami *A*1,*A*2,…,*Ak* in zaključkom *B* lahko dokažemo z resničnostno tabelo, ali pa (ponavadi veliko hitreje!) s konstrukcijo *protiprimera* (t.j. nabora resničnostnih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke *A*1,*A*2,…,*Ak* resnične, zaključek *B* pa ne).

18. 10. 2013

Ogledali smo si še dva pomembna pomožna sklepa: *pogojni sklep* (PS) in *sklep s protislovjem* (RA).

Definirali smo *disjunktivno normalno obliko* (DNO) izjavnega izraza, ki ni protislovje.

***Definicija.*** Množica izjavnih veznikov *M* je ***poln nabor*** izjavnih veznikov, če za vsak izjavni izraz *A* obstaja enakovreden izjavni izraz *B*, ki vsebuje le veznike iz *M*.

S pomočjo DNO vidimo, da je množica {¬,∧,∨} poln nabor izjavnih veznikov.

Ko že poznamo kak poln nabor izjavnih veznikov, lahko za množico izjavnih veznikov *M* pokažemo, da je tudi poln nabor, na naslednji način:

1. Izberemo neki znan polni nabor *P*.

2. Vsak veznik iz *P* izrazimo z vezniki iz *M*. (To pomeni: za vsak *n*-mesten izjavni veznik *F* iz *P* poiščemo izjavni izraz *B*, ki vsebuje le veznike iz *M* in je enakovreden izrazu *F*(*p*1,*p*2,…,*pn*).)

Na ta način smo pokazali, da sta tudi {¬,∨} in {¬,∧} polna nabora izjavnih veznikov.

25. 10. 2013

Pokazali smo, da sta {¬,⇒} in {0,⇒} polna nabora izjavnih veznikov.

Definirali smo še tri dvomestne izjavne veznike. To so: *Stroga disjunkcija* (*p*⊕*q*), *Shefferjev veznik* (*p*↑*q*) in *Lukasiewiczev veznik* (*p*↓*q*).

Pokazali smo, da sta tudi {↑} in {↓} polna nabora izjavnih veznikov.

Da neka množica *M* ni poln nabor veznikov, pa lahko pokažemo tako, da poiščemo neko lastnost izjavnih izrazov *L*, za katero velja:

1. Vsi izjavni izrazi, sestavljeni le iz veznikov iz *M*, imajo lastnost *L*.

2. Obstajajo izjavni izrazi, ki nimajo lastnosti *L*.

3. Če ima izjavni izraz *A* lastnost *L* in je *A*∼*B*, ima tudi izraz *B* lastnost *L*.

*Zgled*: Rečemo, da izjavni izraz *A* *ohranja vrednost* 1, če ima *A* vrednost 1, kadar imajo vse izjavne spremenljivke vrednost 1. Naj bo *M* = {∧,∨,⇒,⇔,1} in naj bo *L* lastnost ohranjanja vrednosti 1. Potem so gornje zahteve 1, 2, 3 izpolnjene. Torej *M* ni poln nabor izjavnih veznikov, saj samo z vezniki iz *M* ne moremo izraziti izjavnih izrazov, ki ne ohranjajo vrednosti 1 (npr. izraza 0 ali izraza ¬*p*).