**Množice**

22. 11. 2013

*Množico* v teoriji množic ZFC vzamemo za osnovni pojem, ki ga ne definiramo. Vse druge matematične pojme lahko definiramo s pomočjo množic.

**3.1. Relacije med množicami**

**1**. Osnovna relacija v teoriji množic je *relacija pripadnosti* ∈.

**2**. *Relacija enakosti* = ima običajne lastnosti. Za vse *A*, *B*, *C* velja:

a) *A*=*A*  (*refleksivnost*)

b) *A*=*B*⟹*B*=*A*  (*simetričnost*)

c) *A*=*B*∧*B*=*C*⟹*A*=*C*  (*tranzitivnost*)

d) *A*=*B* ⟹  vse, kar velja za *A*, velja tudi za *B*  (načelo *zamenljivosti enakega z enakim* )

***Trditev.*** Za poljubni množici *A* in *B* velja:

*A*=*B* ⟹ ∀*x*:(*x*∈*A*⇔*x*∈*B*).

Z besedami: Enaki množici imata iste elemente.

*Dokaz:* Naj bo *A*=*B*. Če je *x*∈*A*, po načelu zamenljivosti od tod sledi *x*∈*B*, torej velja *x*∈*A*⇒*x*∈*B*. Zaradi simetričnosti enakosti je tudi *B*=*A*. Če je *x*∈*B*, po načelu zamenljivosti od tod sledi *x*∈*A*, torej velja *x*∈*B*⇒*x*∈*A*. Zato: *x*∈*A*⇔*x*∈*B*. Ker je bil *x* poljuben, sledi ∀*x*:(*x*∈*A*⇔*x*∈*B*).

Ali velja tudi obratno? To ni samo po sebi umevno, saj bi lahko množice poleg elementov imele še kakšne druge atribute (npr. barvo - potem bi bila množica {1,2,3} različna od množice {1,2,3}, čeprav imata iste elemente). Ker tega ne želimo, privzamemo trditev, da sta množici z istimi elementi enaki, kot aksiom.

***Aksiom ekstenzionalnosti (AE).*** Za poljubni množici *A* in *B* velja:

∀*x*:(*x*∈*A*⇔*x*∈*B*) ⟹ *A*=*B*.

***Posledica.*** Za poljubni množici *A* in *B* velja:

*A*=*B* ⟺ ∀*x*:(*x*∈*A*⇔*x*∈*B*).

Z besedami: Množici sta enaki natanko tedaj, ko imata iste elemente.

Množico torej podamo tako, da povemo, kaj so njeni elementi. Za majhne končne množice lahko elemente naštejemo, npr.: *A*={1,2,3}. Splošneje velja:

*Množico A podamo z zapisom A={x; φ(x)}, kjer je φ(x) izjavna formula, v kateri lahko prosto nastopa le individualna spremenljivka x. Ta zapis je okrajšava za izjavno formulo ∀x:(x∈A⇔φ(x)). Torej je A množica vseh tistih x, za katere velja φ(x).*

Pri tem moramo biti pazljivi, saj nekatere izjavne formule vodijo v protislovje. Če npr. definiramo: *S*={*x*; *x*∉*x*}, dobimo protislovje *S*∈*S*⇔*S*∉*S* (*Russellova antinomija*). Nastalo situacijo lahko razrešimo npr. tako, da namesto množice za osnovni pojem vzamemo *razred*, množico pa definiramo kot poseben primer razreda.

*Definicija*. Razred *A* je *množica*, če obstaja razred *B*, tako da je *A*∈*B*. Če takšnega *B* ni, je *A* *pravi razred*.

Naj bo predikat *M*(*x*) okrajšava za izjavno formulo ∃*y*:*x*∈*y* (torej: *x* je množica). Po definiciji so lahko elementi razredov le množice, zato podajanje razredov definiramo takole:

*Razred A podamo z zapisom A={x; M(x)∧φ(x)}, kjer je φ(x) izjavna formula, v kateri lahko prosto nastopa le spremenljivka x. Torej je A razred vseh tistih množic x, za katere velja φ(x).*

Če zdaj definiramo Russellov razred takole: *S*={*x*; *M*(*x*)∧*x*∉*x*}, velja  *S*∈*S*⇔*M*(*S*)∧*S*∉*S*. Ta izjavna formula pa ni protislovna, ampak je enakovredna formuli *S*∉*S*∧¬*M*(*S*). Torej *S* ni množica, oziroma: *S* je pravi razred.

Odslej bomo privzeli *standardno interpretacijo* izjavnih formul: Za domeno *D* bomo vzeli razred vseh množic, dvomestni predikat *x*∈*y* bomo interpretirali kot relacijo pripadnosti, dvomestni predikat *x*=*y* pa kot relacijo enakosti. Izjavne formule (oziroma njihova univerzalna zaprtja) bomo enačili z ustreznimi izjavami v standardni interpretaciji. Za individualne spremenljivke bomo uporabljali vse črke (velike in male), individualne konstante pa bodo označevali posebni simboli, kot so ∅, 0, 1, 2, *ω*, N, Z, R itd.

V teoriji množic ZFC govorimo le o množicah. Russellovi antinomiji in podobnim protislovjem se skušamo izogniti tako, da privzamemo *eksistenčne aksiome*, ki za "dovolj majhne" množice zagotavljajo, da obstajajo.

**3.** Relacijo ***inkluzije*** ali ***podmnožice*** definiramo takole:

*A*⊆*B* ⟺ ∀*x*:(*x*∈*A* ⇒ *x*∈*B*).

***Trditev.*** Za poljubni množici *A* in *B* velja:

*A*=*B* ⟺ *A*⊆*B*∧*B*⊆*A*.

***Aksiom o podmnožicah (AP).*** Za vsako množico *B* in vsako izjavno formulo *φ*(*x*), ki ne vsebuje prostih nastopov individualne spremenljivke *B*, obstaja množica *A*= {*x*; *x*∈*B*∧*φ*(*x*)}. S formulo: ∀*B*∃*A*∀*x*:(*x*∈*A* ⟺ *x*∈*B*∧*φ*(*x*)).

Če v aksiomu o podmnožicah za *φ*(*x*) vzamemo izjavno formulo *x*≠*x*, lahko iz njega izpeljemo izjavo ∃*A*∀*x*:*x*∉*A*, ki pravi: *Prazna množica ∅ obstaja*.

Iz aksioma o podmnožicah sledi tudi, da *množica vseh množic ne obstaja* (oziroma, če govorimo o razredih: razred vseh množic je *pravi razred*). Recimo namreč, da obstaja množica vseh množic *V*={*x*; *x*=*x*}. Po AP potem obstaja množica

*S*={*x*; *x*∈*V*∧*x*∉*x*}={*x*; *x*≠*x*∧*x*∉*x*}={*x*; *x*∉*x*}.

To pa je "Russellova množica'', ki ne obstaja. Torej tudi *V* ne obstaja.

29. 11. 2013

Za vse množice *A*, *B*, *C* velja:

1. *A*⊆*A*  (refleksivnost)

2. *A*⊆*B*∧*B*⊆*A* ⟹ *A*=*B*  (antisimetričnost)

3. *A* ⊆*B*∧*B*⊆*C* ⟹ *A* ⊆*C*  (tranzitivnost)

4.  ∅⊆*A*

5. *A*⊆∅ ⟹ *A*=∅

**4.** Relacijo ***stroge inkluzije*** ali ***prave podmnožice*** definiramo takole:

*A*⊂*B* ⟺ *A*⊆*B*∧*A*≠*B*.

***Trditev.*** Za poljubni množici *A* in *B* velja:

*A*⊂*B* ⟺ *A*⊆*B*∧∃*x*:(*x*∈*B*∧*x*∉*A*).

Za vse množice *A*, *B*, *C* velja:

1. *A*⊄*A*  (irefleksivnost)

2. *A*⊂*B* ⟹ *B*⊄*A*  (asimetričnost)

3. *A* ⊂*B*∧*B*⊂*C* ⟹ *A* ⊂*C*  (tranzitivnost)

**3.3. Operacije z množicami**

**1. *Neurejeni par***

***Aksiom o paru.***∀*u*∀*v*∃*A*∀*x*:(*x*∈*A* ⟺ *x*=*u*∨*x*=*v*).

*Posledica (izrek o enojčku)*. ∀*u*∃*A*∀*x*:(*x*∈*A* ⇔ *x*=*u*).

**2. *Unija, presek, razlika, Boolova vsota***

*A*∪*B*={*x*; *x*∈*A*∨*x*∈*B*}  *unija* množic *A* in *B*

*A*∩*B*={*x*; *x*∈*A*∧*x*∈*B*}  *presek* množic *A* in *B*

*A*∖*B*={*x*; *x*∈*A*∧*x*∉*B*}  *razlika* množic *A* in *B* (*A* brez *B*)

*A*⊕*B*={*x*; *x*∈*A*⊕*x*∈*B*}  *Boolova vsota* množic *A* in *B*

***Omejeni kvantifikatorji.*** Naj bo *A* množica in *φ* izjavna formula.

∀*x*∈*A*:*φ*   je okrajšava za izjavno formulo  ∀*x*:(*x*∈*A*⇒*φ*).

∃*x*∈*A*:*φ*   je okrajšava za izjavno formulo  ∃*x*:(*x*∈*A*∧*φ*).

*Definicija unije (vseh elementov) množice A:*

⋃*A* = {*x*; ∃*y*∈*A*:*x*∈*y*}

*Definicija preseka (vseh elementov) neprazne množice A:* Naj bo *A*≠∅.

⋂*A* = {*x*; ∀*y*∈*A*:*x*∈*y*}

***Aksiom o uniji.*** ∀*A*∃*B*∀*x*:(*x*∈*B* ⟺ ∃*y*∈*A*:*x*∈*y*).

S pomočjo aksiomov o paru, uniji in podmnožicah smo dokazali:

1. Za vsaki dve množici *A* in *B* obstajajo množice *A*∪*B*, *A*∩*B*, *A*∖*B* in *A*⊕*B*.

2. Za vsako množico *A* obstaja množica ⋃*A* *(to je ravno aksiom o uniji)*.

3. Za vsako neprazno množico *A* obstaja množica ⋂*A*.

**3.** ***Komplement***

Pogosto ne govorimo o *vseh* množicah, ampak le o podmnožicah neke ***univerzalne množice*** *S*. Tedaj za vsako množico *A*⊆*S* definiramo *komplement* *Ac* množice *A* (glede na univerzalno množico *S*):

*Ac*={*x*∈*S*; *x*∉*A*}

Očitno *Ac* obstaja po aksiomu o podmnožicah. Velja: *Ac*=*S*∖*A* in (*Ac*)*c*=*A*.

**4. *Potenčna množica***

***Definicija***. Množico

P*A* = {*x*; *x*⊆*A*}

imenujemo *množica vseh podmnožic* ali *potenčna množica* množice *A*.

***Aksiom o potenčni množici.*** ∀*A*∃*B*∀*x*:(*x*∈*B* ⟺ *x*⊆*A*).

Za vsako množico *A* velja:  ∅∈P*A*,  *A*∈P*A*,  ⋃P*A*=*A*  in  ⋂P*A*=∅.

Če je *A* končna množica z *n* elementi, je P*A* končna množica z 2*n* elementi.

6. 12. 2013

**5. Urejeni par in kartezični produkt**

***Definicija***. Množico

(*x*,*y*) = {{*x*,*y*},{*x*}}

imenujemo ***urejeni par*** s *prvo komponento* *x* in *drugo komponento* *y*.

***Izrek*** (osnovna lastnost urejenih parov).

(*x*,*y*)=(*u*,*v*) ⟺ *x*=*u*∧*y*=*v*.

***Definicija***. Množica

*A*×*B* = {(*x*,*y*); *x*∈*A*∧*y*∈*B*}

je ***kartezični produkt*** množic *A* in *B*.

Ugotovili smo, da je *A*×*B*⊆PP(*A*∪*B*). Če obstajata množici *A* in *B*, po aksiomih o paru, uniji in potenčni množici obstaja tudi množica PP(*A*∪*B*), po aksiomu o podmnožicah torej tudi

*A*×*B* = {*x*∈PP(*A*∪*B*); ∃*a*∈*A*∃*b*∈*B*:*x*=(*a*,*b*)}.

Če je *A* končna množica z *n* elementi in *B* končna množica s *k* elementi, je *A*×*B* končna množica z *n*⋅*k* elementi.

Za *n*≥2 smo induktivno definirali ***urejeno*** *n****-terico*** (*a*1,*a*2,…,*an*) takole:

1. (*a*1,*a*2) = {{*a*1,*a*2},{*a*1}},

2. za *n*≥3 je (*a*1,*a*2,…,*an*) = ((*a*1,*a*2,…,*an*−1),*an*).

***Izrek*** (osnovna lastnost urejenih *n*-teric).

(*a*1,*a*2,…,*an*)=(*b*1,*b*2,…,*bn*) ⟺

*a*1=*b*1∧*a*2=*b*2∧⋯∧*an*=*bn*.

***Definicija***. Množica

*A*1×*A*2×⋯×*An* =

{(*x*1,*x*2,…,*xn*); *x*1∈*A*1∧*x*2∈*A*2∧⋯∧*xn*∈*An*}

je ***kartezični produkt*** množic *A*1,*A*2,…,*An*.