Množice

22. 11. 2013

Množico v teoriji množic ZFC vzamemo za osnovni pojem, ki ga ne definiramo. Vse druge matematične pojme lahko definiramo s pomočjo množic.

3.1. Relacije med množicami

1. Osnovna relacija v teoriji množic je *relacija pripadnosti* $\in$.

2. *Relacija enakosti* $=$ ima običajne lastnosti. Za vse A, B, C velja:

a) $A=A$ (*refleksivnost*)

b) $A=B \Longrightarrow B=A$ (*simetričnost*)

c) $A=B \wedge B=C \Longrightarrow A=C$ (*tranzitivnost*)

d) $A=B \Longrightarrow$ vse, kar velja za A, velja tudi za B (načelo *zamenljivosti enakega z enakim*)

Trditev. Za poljubni množici A in B velja:

$$A=B \Longrightarrow \forall x:(x\in A \Leftrightarrow x\in B).$$

Z besedami: Enaki množici imata iste elemente.

Dokaz: Naj bo $A=B$. Če je $x\in A$, po načelu zamenljivosti od tod sledi $x\in B$, torej velja $x\in A \Rightarrow x\in B$. Zaradi simetričnosti enakosti je tudi $B=A$. Če je $x\in B$, po načelu zamenljivosti od tod sledi $x\in A$, torej velja $x\in B \Rightarrow x\in A$. Zato: $x\in A \Leftrightarrow x\in B$. Ker je bil x poljuben, sledi $\forall x:(x\in A \Leftrightarrow x\in B)$.

Ali velja tudi obratno? To ni samo po sebi umevno, saj bi lahko množice poleg elementov imele še kakšne druge atribute (npr. barvo - potem bi bila množica $\{1,2,3\}$ različna od množice $\{1,2,3\}$, čeprav imata iste elemente). Ker tega ne želimo, privzamemo trditev, da sta množici z istimi elementi enaki, kot aksiom.

Aksiom ekstenzionalnosti (AE). Za poljubni množici A in B velja:

$$\forall x:(x\in A \Leftrightarrow x\in B) \Longrightarrow A=B.$$

Posledica. Za poljubni množici A in B velja:

$$A=B \Longleftrightarrow \forall x:(x\in A \Leftrightarrow x\in B).$$

Z besedami: Množici sta enaki natanko tedaj, ko imata iste elemente.

Množico torej podamo tako, da povemo, kaj so njeni elementi. Za majhne končne množice lahko elemente naštejemo, npr.: $A=\{1,2,3\}$. Splošneje velja:

Množico A podamo z zapisom $A=\{x;\ \phi(x)\}$, kjer je $\phi(x)$ izjavna formula, v kateri lahko prosto nastopa le individualna spremenljivka x. Ta zapis je okrajšava za izjavno formulo $\forall x:(x\in A \Leftrightarrow \phi(x))$. Torej je A množica vseh tistih x, za katere velja $\phi(x)$.

Pri tem moramo biti pazljivi, saj nekatere izjavne formule vodijo v protislovje. Če npr. definiramo: $S=\{x;\ x\notin x\}$, dobimo protislovje $S\in S \Leftrightarrow S\notin S$ (*Russellova antinomija*).

Nastalo situacijo lahko razrešimo npr. tako, da namesto množice za osnovni pojem vzamemo *razred*, množico pa definiramo kot poseben primer razreda.

Definicija. Razred A je *množica*, če obstaja razred B, tako da je $A \in B$. Če takšnega B ni, je A *pravi razred*.

Naj bo predikat $M(x)$ okrajšava za izjavno formulo $\exists y . x \in y$ (torej: x je množica). Po definiciji so lahko elementi razredov le množice, zato podajanje razredov definiramo takole:

Razred A podamo z zapisom $A = \{x;\ M(x) \wedge \phi(x)\}$, kjer je $\phi(x)$ izjavna formula, v kateri lahko prosto nastopa le spremenljivka x. Torej je A razred vseh tistih množic x, za katere velja $\phi(x)$.

Če zdaj definiramo Russellov razred takole: $S = \{x;\ M(x) \wedge x \notin x\}$, velja $S \in S \Leftrightarrow M(S) \wedge S \notin S$. Ta izjavna formula pa ni protislovna, ampak je enakovredna formuli $S \notin S \wedge \neg M(S)$. Torej S ni množica, oziroma: S je pravi razred.

Odslej bomo privzeli *standardno interpretacijo* izjavnih formul: Za domeno D bomo vzeli razred vseh množic, dvomestni predikat $x \in y$ bomo interpretirali kot relacijo pripadnosti, dvomestni predikat $x = y$ pa kot relacijo enakosti. Izjavne formule (oziroma njihova univerzalna zaprtja) bomo enačili z ustreznimi izjavami v standardni interpretaciji. Za individualne spremenljivke bomo uporabljali vse črke (velike in male), individualne konstante pa bodo označevali posebni simboli, kot so $\emptyset$, 0, 1, 2, ω, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ itd.

V teoriji množic ZFC govorimo le o množicah. Russellovi antinomiji in podobnim protislovjem se skušamo izogniti tako, da privzamemo *eksistenčne aksiome*, ki za "dovolj majhne" množice zagotavljajo, da obstajajo.

3. Relacijo ***inkluzije*** ali ***podmnožice*** definiramo takole:

$$A \subseteq B \iff \forall x . (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Trditev. Za poljubni množici A in B velja:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Aksiom o podmnožicah (AP). Za vsako množico B in vsako izjavno formulo $\phi(x)$, ki ne vsebuje prostih nastopov individualne spremenljivke B, obstaja množica $A = \{x;\ x \in B \wedge \phi(x)\}$. S formulo: $\forall B \exists A \forall x . (x \in A \iff x \in B \wedge \phi(x))$.

Če v aksiomu o podmnožicah za $\phi(x)$ vzamemo izjavno formulo $x \neq x$, lahko iz njega izpeljemo izjavo $\exists A \forall x . x \notin A$, ki pravi: *Prazna množica $\emptyset$ obstaja*.

Iz aksioma o podmnožicah sledi tudi, da *množica vseh množic ne obstaja* (oziroma, če govorimo o razredih: razred vseh množic je *pravi razred*). Recimo namreč, da obstaja množica vseh množic $V = \{x;\ x = x\}$. Po AP potem obstaja množica

$$S = \{x;\ x \in V \wedge x \notin x\} = \{x;\ x \neq x \wedge x \notin x\} = \{x;\ x \notin x\}.$$

To pa je "Russellova množica", ki ne obstaja. Torej tudi V ne obstaja.

29. 11. 2013

Za vse množice A, B, C velja:

1. $A \subseteq A$ (refleksivnost)

2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$ (antisimetričnost)

3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (tranzitivnost)

4. $\emptyset \subseteq A$

5. $A \subseteq \emptyset \implies A = \emptyset$

4. Relacijo ***stroge inkluzije*** ali ***prave podmnožice*** definiramo takole:

$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Trditev. Za poljubni množici A in B velja:

$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge \exists x : (x \in B \wedge x \notin A)$.

Za vse množice A, B, C velja:

1. $A \not\subset A$ (irefleksivnost)

2. $A \subset B \implies B \not\subset A$ (asimetričnost)

3. $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$ (tranzitivnost)

3.3. Operacije z množicami

1. *Neurejeni par*

Aksiom o paru. $\forall u \forall v \exists A \forall x : (x \in A \iff x = u \vee x = v)$.

Posledica (izrek o enojčku). $\forall u \exists A \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x = u)$.

2. *Unija, presek, razlika, Boolova vsota*

$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$ *unija* množic A in B

$A \cap B = \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$ *presek* množic A in B

$A \setminus B = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$ *razlika* množic A in B (A brez B)

$A \oplus B = \{x;\ x \in A \oplus x \in B\}$ *Boolova vsota* množic A in B

Omejeni kvantifikatorji. Naj bo A množica in ϕ izjavna formula.

$\forall x \in A : \phi$ je okrajšava za izjavno formulo $\forall x : (x \in A \Rightarrow \phi)$.

$\exists x \in A : \phi$ je okrajšava za izjavno formulo $\exists x : (x \in A \wedge \phi)$.

Definicija unije (vseh elementov) množice A:

$$A = \{x;\ \exists y \in A : x \in y\}$$

Definicija preseka (vseh elementov) neprazne množice A: Naj bo $A \neq \emptyset$.

$A = \{x;\ \forall y \in A : x \in y\}$

Aksiom o uniji. $\forall A \exists B \forall x : (x \in B \iff \exists y \in A : x \in y)$.

S pomočjo aksiomov o paru, uniji in podmnožicah smo dokazali:

1. Za vsaki dve množici A in B obstajajo množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ in $A \oplus B$.

2. Za vsako množico A obstaja množica A *(to je ravno aksiom o uniji).*

3. Za vsako neprazno množico A obstaja množica A.

3. *Komplement*

Pogosto ne govorimo o *vseh* množicah, ampak le o podmnožicah neke ***univerzalne množice*** S. Tedaj za vsako množico $A \subseteq S$ definiramo *komplement* A^c množice A (glede na univerzalno množico S):

$A^c = \{x \in S;\ x \notin A\}$

Očitno A^c obstaja po aksiomu o podmnožicah. Velja: $A^c = S \setminus A$ in $(A^c)^c = A$.

4. *Potenčna množica*

Definicija. Množico

$\mathrm{P}A = \{x;\ x \subseteq A\}$

imenujemo *množica vseh podmnožic* ali *potenčna množica* množice A.

Aksiom o potenčni množici. $\forall A \exists B \forall x : (x \in B \iff x \subseteq A)$.

Za vsako množico A velja: $\emptyset \in \mathrm{P}A$, $A \in \mathrm{P}A$, $\mathrm{P}A = A$ in $\mathrm{P}A = \emptyset$.

Če je A končna množica z n elementi, je $\mathrm{P}A$ končna množica z 2^n elementi.

6. 12. 2013

5. Urejeni par in kartezični produkt

Definicija. Množico

$(x,y) = \{\{x,y\},\{x\}\}$

imenujemo ***urejeni par*** s *prvo komponento* x in *drugo komponento* y.

Izrek (osnovna lastnost urejenih parov).

$(x,y) = (u,v) \iff x = u \wedge y = v$.

Definicija. Množica

$A \times B = \{(x,y);\ x \in A \wedge y \in B\}$

je ***kartezični produkt*** množic A in B.

Ugotovili smo, da je $A \times B \subseteq \mathrm{PP}(A \cup B)$. Če obstajata množici A in B, po aksiomih o paru, uniji in potenčni množici obstaja tudi množica $\mathrm{PP}(A \cup B)$, po aksiomu o podmnožicah torej tudi

$A \times B = \{x \in PP(A \cup B);\ \exists a \in A \exists b \in B : x = (a,b)\}$.

Če je A končna množica z n elementi in B končna množica s k elementi, je $A \times B$ končna množica z $n \cdot k$ elementi.

Za $n \geq 2$ smo induktivno definirali ***urejeno*** n***-terico*** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takole:

1. $(a_1, a_2) = \{\{a_1, a_2\}, \{a_1\}\}$,
2. za $n \geq 3$ je $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Izrek (osnovna lastnost urejenih n-teric).

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff$

$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$.

Definicija. Množica

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$

je ***kartezični produkt*** množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$.