Moč množic

Definicija. Množica A ima *enako moč* kot množica B $(A\sim B)$, če obstaja bijekcija, ki preslika A v B.

Množica A ima *manjšo ali enako moč* kot množica B $(A\leq B)$, če obstaja injekcija, ki preslika A v B.
17. 1. 2014

Schroeder - Bernsteinov izrek. $A\leq B\land B\leq A \implies A\sim B$

Izrek. $\exists g\colon A\rightarrow B$ surjekcija $\implies A\geq B$

Definicija. $A\prec B \iff A\leq B\land A \quad B$

Izrek o trihotomiji. Za množici A in B velja natanko ena od treh možnosti:

bodisi $A\prec B$ bodisi $A\sim B$ bodisi $A\succ B$.

Definicija (Dedekind) Množica A je *neskončna,* če obstaja prava podmnožica $B\subset A$, tako da je $A\sim B$. Množica A je *končna,* če ni neskončna.

Izrek. A neskončna $\iff A\geq \mathbb{N}$ (tu je $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ množica naravnih števil).

Definicija. Množica A je *števno neskončna,* če $A\sim\mathbb{N}$. Množica A je *števna,* če je končna ali števno neskončna. Množica A je *neštevna,* če ni števna.
Velja:

A končna $\iff A\prec\mathbb{N}$

A števna $\iff A\leq\mathbb{N}$

A števno neskončna $\iff A\sim\mathbb{N}$

A neskončna $\iff A\geq\mathbb{N}$

A neštevna $\iff A\succ\mathbb{N}$

Izrek. Unija števne družine števnih množic je števna.

Posledica. Množice $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ naravnih števil, celih števil, racionalnih števil so števne.

Cantorjev izrek. $\mathcal{P}A\succ A$.

Potenčna množica množice naravnih števil $\mathcal{P}\mathbb{N}$ je torej neštevna.

Pokazali smo, da je $\mathbb{R}\sim\mathcal{P}\mathbb{N}$, torej je tudi množica realnih števil $\mathbb{R}$ neštevna. Prav tako so neštevni evklidski prostori $\mathbb{R}^n$ za vse $n\geq 1$ in množica kompleksnih števil $\mathbb{C}$.