Zgled dokaza enakovrednosti v predikatnem računu

Trditev. Za vsako izjavno formulo φ je $\neg\forall x : \varphi \ \sim\ \exists x : \neg\varphi$.

Dokaz: Po definiciji enakovrednosti moramo pokazati, da je izjavna formula

$$\neg\forall x : \varphi \iff \exists x : \neg\varphi \tag{1}$$

logično veljavna, po definiciji logične veljavnosti torej, da je univerzalno zaprtje formule (1) resnično v vsaki interpretaciji. Pa začnimo.

Sestavimo najprej univerzalno zaprtje formule (1). Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *vse* individualne spremenljivke, ki *prosto* nastopajo v izjavni formuli (1). Pišimo $\varphi = \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Potem je

$$\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k : (\neg\forall x : \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \iff \exists x : \neg\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_k))$$

univerzalno zaprtje izjavne formule (1). Označimo ga s ψ.

Ker moramo dokazati resničnost formule ψ v *vsaki* interpretaciji, vzemimo katerokoli interpretacijo I formule ψ. Ker se ψ začne s k *univerzalnimi* kvantifikatorji, izberimo katerekoli elemente $b_1, b_2, \ldots, b_k \in D$. Potem velja:

- izjava $\neg\forall x \in D : \bar{\varphi}(x, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ je resnična natanko tedaj, ko
- izjava $\forall x \in D : \bar{\varphi}(x, b_1, b_2, \ldots, b_k)$ ni resnična; to je natanko tedaj, ko
- obstaja $a \in D$, tako da je resnična izjava $\neg\bar{\varphi}(a, b_1, b_2, \ldots, b_k)$; to pa je natanko tedaj, ko
- je resnična izjava $\exists x \in D : \neg\bar{\varphi}(x, b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Potemtakem je resnična ekvivalenca

$$\neg\forall x \in D : \bar{\varphi}(x, b_1, b_2, \ldots, b_k) \iff \exists x \in D : \neg\bar{\varphi}(x, b_1, b_2, \ldots, b_k).$$

Ker so bili $b_1, b_2, \ldots, b_k \in D$ poljubni, je torej resnična izjava

$$\begin{aligned}&\forall y_1 \in D\ \forall y_2 \in D \cdots \forall y_k \in D : \\ &\qquad (\neg\forall x \in D : \bar{\varphi}(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \iff \exists x \in D : \neg\bar{\varphi}(x, y_1, y_2 \ldots, y_k)).\end{aligned}$$

To pa je ravno izjava $\bar{\psi}$, ki v interpretaciji I ustreza zaprti izjavni formuli ψ. Torej je ψ resnična v interpretaciji I. Ker je bila ta poljubna, je ψ resnična v vsaki interpretaciji. Po razmisleku iz prvega odstavka je dokaz končan. $\square$