**Relacije in funkcije**

**4.1. Definicija in lastnosti relacij**

***Definicija***. Množica *R* je ***dvomestna relacija*** v množici *A*, če je *R*⊆*A*×*A*.

Dvomestna relacija v množici *A* je torej neka množica urejenih parov elementov množice *A*.

***Zgledi.***Naj bo *A* poljubna množica.

1.  ∅⊆*A*×*A* je *prazna relacija* v *A*.

2.  *A*×*A*⊆*A*×*A* je *univerzalna relacija* v *A*.

3.  id*A*={(*x*,*x*); *x*∈*A*} je *enakost* ali *identiteta* v *A*.

*Relacijska pisava.* Namesto (*x*,*y*)∈*A* pišemo *xRy* in beremo: *x* je v relaciji *R* z *y*. Namesto *x*id*Ay* pišemo *x*=*y*.

***Definicija.*** Naj bo *R*⊆*A*×*A*.

D*R* = {*x*∈*A*; ∃*y*∈*A*:*xRy*} (*domena* ali *definicijsko območje* *R*)

Z*R* = {*y*∈*A*; ∃*x*∈*A*:*xRy*} (*zaloga vrednosti* *R*)

***Definicija.*** Dvomestna relacija *R*⊆*A*×*A* je:

 1. *refleksivna,* če ∀*x*∈*A*:*xRx*;

 2*. irefleksivna,* če ∀*x*∈*A*:¬(*xRx*);

 3. *simetrična,* če ∀*x*,*y*∈*A*:(*xRy*⇒*yRx*);

 4. *asimetrična,* če ∀*x*,*y*∈*A*:(*xRy*⇒¬(*yRx*));

 5*. antisimetrična,* če ∀*x*,*y*∈*A*:(*xRy*∧*yRx*⇒*x*=*y*);

 6. *tranzitivna,* če ∀*x*,*y*,*z*∈*A*:(*xRy*∧*yRz*⇒*xRz*);

 7. *intranzitivna,* če ∀*x*,*y*,*z*∈*A*:(*xRy*∧*yRz*⇒¬(*xRz*));

 8. *sovisna,* če ∀*x*,*y*∈*A*:(*x*≠*y*⇒*xRy*∨*yRx*);

 9. *strogo sovisna,* če ∀*x*,*y*∈*A*:(*xRy*∨*yRx*);

10. *enolična*, če ∀*x*,*y*,*z*∈*A*:(*xRy*∧*xRz*⇒*y*=*z*).

13. 12. 2013

***Trditev.*** Naj bo *R*⊆*A*×*A*.

1. *R* asimetrična  ⟺  *R* antisimetrična in irefleksivna

2. *R* strogo sovisna  ⟺  *R* sovisna in irefleksivna

**4.2. Ekvivalenčne relacije**

***Definicija***. Relacija *R* v množici *A* je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Naj bo *R*⊆*A*×*A* ekvivalenčna. Vsakemu elementu *x*∈*A* priredimo njegov *ekvivalenčni razred R*[*x*]={*y*∈*A*; *yRx*}. Množico vseh ekvivalenčnih razredov *A*/*R*={*R*[*x*]; *x*∈*A*} imenujemo *faktorska* ali *kvocientna množica* množice *A* po relaciji *R*.

***Trditev*.** *R*[*x*]=*R*[*y*] ⟺ *xRy*

***Definicija.*** Množica *P*⊆P*A* je *razdelitev* ali *particija* množice *A*, če velja:

1. ∀*B*∈*P*: *B*≠∅,

2. ∀*B*1,*B*2∈*P*: (*B*1≠*B*2⇒*B*1∩*B*2=∅),

3. ⋃*P*=*A*.

Elemente razdelitve *P* imenujemo *bloki*.

***Izrek***. Naj bo *R* ekvivalenčna relacija v množici *A.* Potem je *A*/*R* razdelitev množice *A*.

**4.3. Operacije z relacijami**

Če sta *R* in *S* dvomestni relaciji v *A*, so tudi *R*∪*S*, *R*∩*S*, *R*∖*S*, *R*⊕*S* in *Rc*=(*A*×*A*)∖*R* dvomestne relacije v *A*.

***Definicija.*** Naj bosta *R* in *S* dvomestni relaciji v *A*.

1. *R*−1={(*x*,*y*); (*y*,*x*)∈*R*} je *inverzna relacija* relacije *R*,

2. *R*∘*S*={(*x*,*y*); ∃*u*∈*A*:(*xSu*∧*uRy*)} je *kompozitum* relacij *R* in *S*.

Ogledali smo si nekaj lastnosti operacij z relacijami. Med njimi je posebej pomembna *asociativnost komponiranja*. Pokazali smo tudi, kako je mogoče algebraično karakterizirati lastnosti relacij.

20. 12. 2013

Definirali smo *potence* relacije *R* z naravnimi eksponenti (glede na komponiranje) ter relaciji *R*+ in *R*∗. Prva je unija vseh pozitivnih potenc relacije *R*, druga pa unija vseh nenegativnih potenc relacije *R*.

***Definicija.*** Naj bo *R* dvomestna relacija v *A* in *L*⊆P(*A*×*A*) neka lastnost relacij. Relacija *RL* v *A* je *L-ovojnica* relacije *R*, če velja:

1. *R*⊆*RL*,

2. *RL*∈*L*,

3. ∀*S*⊆*A*×*A*: (*R*⊆*S*∧*S*∈*L* ⇒ *RL*⊆*S*).

Z besedami: *L*-ovojnica relacije *R* je najmanjša relacija, ki vsebuje *R* in ima lastnost *L*.

Pokazali smo, da je *R*+ tranzitivna ovojnica relacije *R*. Podobno je *R*∗ refleksivna in tranzitivna ovojnica relacija *R*.

**4.4. Funkcije**

*Neformalna definicija*. *Funkcija* *f*:*A*⟶*B*  je predpis, ki vsakemu elementu *x*∈*A* priredi točno določen element *y*∈*B*.

V teoriji množic funkcijo *f* definiramo kot množico urejenih parov (*x*,*y*), kjer je *y* tisti element, ki ga *f* priredi elementu *x*.

***Formalna definicija.*** 1. *Funkcija* je enolična dvomestna relacija.

2. Funkcija *f* je *preslikava množice A v množico B*, če je D*f*=*A* in Z*f*⊆*B*.

Pišemo: *f*:*A*⟶*B*  ali *A*⟶*fB*.

Množico *B* imenujemo *kodomena* preslikave *f*:*A*⟶*B*.

Če je *f* funkcija, namesto relacijske pisave *xfy* uporabljamo funkcijsko pisavo *y*=*f*(*x*) ali *f*:*x*⟼*y*. Rečemo, da je *y* *f*-*slika originala x* ali *vrednost* *f* *pri* *argumentu* *x*.

***Zgledi.***

1. Prazna množica ∅ je funkcija, ki jo imenujemo *prazna funkcija*.

2. Naj bo *A* poljubna množica. Preslikavo

id*A*:*A*⟶*A*,  ∀*x*∈*A*:id*A*(*x*)=*x*,

imenujemo *identična preslikava* na *A*.

3. Naj bo *A*⊆*B*. Preslikavo

*i*:*A*⟶*B*,  ∀*x*∈*A*:*i*(*x*)=*x*,

imenujemo *vložitev* *A* v *B*.

4. Za vse *i*∈{1,2,…,*n*} preslikavo

*pi*:*A*1×*A*2×⋯×*An*⟶*Ai*,

kjer za vse  *i*∈{1,2,…,*n*} in (*a*1,*a*2,…,*an*)∈*A*1×*A*2×⋯×*An* velja:

*pi*((*a*1,*a*2,…,*an*))=*ai*,

imenujemo *projekcija na i-to komponento*.

5. Naj bo *R*⊆*A*×*A* ekvivalenčna relacija v množici *A*. Preslikavo

*p*:*A*⟶*A*/*R*,  ∀*x*∈*A*:*p*(*x*)=*R*[*x*],

imenujemo *naravna projekcija*.

6. Naj bo *A*⊆*S*. Preslikavo

*χA*:*S*⟶{0,1},∀*x*∈*S*:*χS*(*x*)={1,0,*x*∈*A*,*x*∉*A*,

imenujemo *karakteristična funkcija* množice *A* glede na univerzalno množico *S*.

***Definicija***. Naj bo *f*:*A*⟶*B*.

1. *f* je *injektivna*, če ∀*x*,*y*∈*A*:(*f*(*x*)=*f*(*y*) ⟹ *x*=*y*).

2. *f* je *surjektivna*, če je Z*f*=*B*.

3. *f* je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

***Definicija***. Preslikavo *f*:*A*1×*A*2×⋯×*An*⟶*B* imenujemo tudi *funkcija n spremenljivk*. Tedaj namesto *f*((*x*1,*x*2,…,*xn*)) pišemo *f*(*x*1,*x*2,…,*xn*).

Kot za vsako relacijo tudi za funkcijo *f* obstaja *inverzna relacija* *f*−1.

***Trditev.***

1. Naj bo *f* funkcija. Potem velja: *f*−1 je funkcija  ⟺  *f* injektivna.

2. Naj bo *f*:*A*→*B*. Potem velja: *f*−1:*B*→*A*  ⟺  *f* bijektivna.

***Trditev***.

1. Če sta *f* in *g* funkciji, je tudi *f*∘*g* funkcija in za vse *x*∈D*f*∘*g* velja:

(*f*∘*g*)(*x*)=*f*(*g*(*x*)).

2. Naj bo *g*:*A*⟶*B* in *f*:*B*⟶*C*. Potem *f*∘*g*:*A*⟶*C*.

***Trditev***. Naj bo *f*:*A*⟶*B*. Potem je *f*∘id*A*=*f* in id*B*∘*f*=*f*.

***Trditev***.  Naj bo *g*:*A*⟶*B* in *f*:*B*⟶*C*. Potem velja:

1. *f*, *g* injektivni  ⟹  *f*∘*g* injektivna.

2. *f*, *g* surjektivni  ⟹  *f*∘*g* surjektivna.

3. *f*∘*g* injektivna  ⟹  *g* injektivna.

4. *f*∘*g* surjektivna  ⟹  *f* surjektivna.

4. 1. 2014

***Trditev****.* Naj bo *f*:*A*⟶*B* in naj bo *f*−1 njena inverzna relacija. Potem velja:

1. *f*−1∘*f*=*Kf*,

2. *f*∘*f*−1=idZ*f*,

3. *f* injektivna  ⟺  *f*−1∘*f*=id*A*,

4. *f* surjektivna  ⟺  *f*∘*f*−1=id*B*.

***Izrek****.* Naj bo *f*:*A*⟶*B* in *g*:*B*⟶*A*. Če je *g*∘*f*=id*A* in *f*∘*g*=id*B*, potem sta *f* in *g* bijekciji in *g*=*f*−1.

Za preslikavo *f*:*A*→*B* smo definirali ***sliko*** *f*[*A*1] podmnožice *A*1⊆*A* in ***prasliko*** *f*−1[*B*1] podmnožice *B*1⊆*B*. Ogledali smo si nekaj lastnosti slik in praslik.

***Družino množic*** z indeksno množico I smo definirali kot surjektivno preslikavo A:I→*M*, kjer je *M* neka množica množic. Za *λ*∈I namesto A(*λ*) pišemo *Aλ*, družino pa označujemo z (*Aλ*)*λ*∈I. Družina (*Aλ*)*λ*∈I je *prazna*, če je I=∅.

***Definicija.***

1. ⋃*λ*∈I*Aλ*={*x*; ∃*λ*∈I:*x*∈*Aλ*}  (unija družine)

2. Če I≠∅:  ⋂*λ*∈I*Aλ*={*x*; ∀*λ*∈I:*x*∈*Aλ*}  (presek neprazne družine)

3. ∏*λ*∈I*Aλ*={*f*:I→ ∪*λ*∈I*Aλ*; ∀*λ*∈I:*f*(*λ*)∈*Aλ*}  (kartezični produkt družine)

Elemente kartezičnega produkta družine imenujemo *funkcije izbire* za družino.

***Aksiom izbire (AC):*** Kartezični produkt poljubne družine nepraznih množic je neprazen.