Relacije in funkcije

4.1. Definicija in lastnosti relacij

Definicija. Množica R je ***dvomestna relacija*** v množici A, če je $R \subseteq A \times A$.

Dvomestna relacija v množici A je torej neka množica urejenih parov elementov množice A.

Zgledi. Naj bo A poljubna množica.

1. $\emptyset \subseteq A \times A$ je *prazna relacija* v A.
2. $A \times A \subseteq A \times A$ je *univerzalna relacija* v A.
3. $\mathrm{id}_A = \{(x,x);\ x \in A\}$ je *enakost* ali *identiteta* v A.

Relacijska pisava. Namesto $(x,y) \in A$ pišemo xRy in beremo: x je v relaciji R z y. Namesto $x\,\mathrm{id}_A\,y$ pišemo $x = y$.

Definicija. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$\mathrm{D}_R = \{x \in A;\ \exists y \in A: xRy\}$ (*domena* ali *definicijsko območje* R)

$\mathrm{Z}_R = \{y \in A;\ \exists x \in A: xRy\}$ (*zaloga vrednosti* R)

Definicija. Dvomestna relacija $R \subseteq A \times A$ je:

1. *refleksivna,* če $\forall x \in A: xRx$;
2. *irefleksivna,* če $\forall x \in A: \neg(xRx)$;
3. *simetrična,* če $\forall x,y \in A: (xRy \Rightarrow yRx)$;
4. *asimetrična,* če $\forall x,y \in A: (xRy \Rightarrow \neg(yRx))$;
5. *antisimetrična,* če $\forall x,y \in A: (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$;
6. *tranzitivna,* če $\forall x,y,z \in A: (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$;
7. *intranzitivna,* če $\forall x,y,z \in A: (xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg(xRz))$;
8. *sovisna,* če $\forall x,y \in A: (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$;
9. *strogo sovisna,* če $\forall x,y \in A: (xRy \vee yRx)$;
10. *enolična,* če $\forall x,y,z \in A: (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$.

13. 12. 2013

Trditev. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

1. R asimetrična $\iff$ R antisimetrična in irefleksivna
2. R strogo sovisna $\iff$ R sovisna in irefleksivna

4.2. Ekvivalenčne relacije

Definicija. Relacija R v množici A je *ekvivalenčna*, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna. Vsakemu elementu $x \in A$ priredimo njegov *ekvivalenčni razred* $R[x] = \{ y \in A;\ \ yRx \}$. Množico vseh ekvivalenčnih razredov $A/R = \{ R[x];\ \ x \in A \}$ imenujemo *faktorska* ali *kvocientna množica* množice A po relaciji R.

Trditev. $R[x] = R[y] \iff xRy$

Definicija. Množica $P \subseteq \mathcal{P}A$ je *razdelitev* ali *particija* množice A, če velja:

1. $\forall B \in P:\ \ B \neq \emptyset$,
2. $\forall B_1, B_2 \in P:\ \ (B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset)$,
3. $P = A$.

Elemente razdelitve P imenujemo *bloki*.

Izrek. Naj bo R ekvivalenčna relacija v množici A. Potem je A/R razdelitev množice A.

4.3. Operacije z relacijami

Če sta R in S dvomestni relaciji v A, so tudi $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \oplus S$ in $R^c = (A \times A) \setminus R$ dvomestne relacije v A.

Definicija. Naj bosta R in S dvomestni relaciji v A.

1. $R^{-1} = \{ (x,y);\ \ (y,x) \in R \}$ je *inverzna relacija* relacije R,
2. $R \circ S = \{ (x,y);\ \ \exists u \in A : (xSu \wedge uRy) \}$ je *kompozitum* relacij R in S.

Ogledali smo si nekaj lastnosti operacij z relacijami. Med njimi je posebej pomembna *asociativnost komponiranja*. Pokazali smo tudi, kako je mogoče algebraično karakterizirati lastnosti relacij.

20. 12. 2013

Definirali smo *potence* relacije R z naravnimi eksponenti (glede na komponiranje) ter relaciji R^+ in R^*. Prva je unija vseh pozitivnih potenc relacije R, druga pa unija vseh nenegativnih potenc relacije R.

Definicija. Naj bo R dvomestna relacija v A in $L \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ neka lastnost relacij. Relacija R_L v A je *L-ovojnica* relacije R, če velja:

1. $R \subseteq R_L$,
2. $R_L \in L$,
3. $\forall S \subseteq A \times A:\ \ (R \subseteq S \wedge S \in L\ \Rightarrow\ R_L \subseteq S)$.

Z besedami: L-ovojnica relacije R je najmanjša relacija, ki vsebuje R in ima lastnost L.

Pokazali smo, da je R^+ tranzitivna ovojnica relacije R. Podobno je R^* refleksivna in tranzitivna ovojnica relacija R.

4.4. Funkcije

Neformalna definicija. *Funkcija* $f: A \longrightarrow B$ je predpis, ki vsakemu elementu $x \in A$ priredi točno določen element $y \in B$.

V teoriji množic funkcijo f definiramo kot množico urejenih parov (x, y), kjer je y tisti element, ki ga f priredi elementu x.

Formalna definicija. 1. *Funkcija* je enolična dvomestna relacija.

2. Funkcija f je *preslikava množice* A *v množico* B, če je $\mathrm{D}_f = A$ in $\mathrm{Z}_f \subseteq B$.

Pišemo: $f: A \longrightarrow B$ ali $A \longrightarrow_f B$.

Množico B imenujemo *kodomena* preslikave $f: A \longrightarrow B$.

Če je f funkcija, namesto relacijske pisave $x f y$ uporabljamo funkcijsko pisavo $y = f(x)$ ali $f: x \longmapsto y$. Rečemo, da je y *f-slika originala* x ali *vrednost* f *pri argumentu* x.

Zgledi.

1. Prazna množica $\emptyset$ je funkcija, ki jo imenujemo *prazna funkcija*.

2. Naj bo A poljubna množica. Preslikavo

$$\mathrm{id}_A: A \longrightarrow A, \quad \forall x \in A: \mathrm{id}_A(x) = x,$$

imenujemo *identična preslikava* na A.

3. Naj bo $A \subseteq B$. Preslikavo

$$i: A \longrightarrow B, \quad \forall x \in A: i(x) = x,$$

imenujemo *vložitev* A v B.

4. Za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ preslikavo

$$p_i: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_i,$$

kjer za vse $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ velja:

$$p_i((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = a_i,$$

imenujemo *projekcija na i-to komponento*.

5. Naj bo $R \subseteq A \times A$ ekvivalenčna relacija v množici A. Preslikavo

$$p: A \longrightarrow A/R, \quad \forall x \in A: p(x) = R[x],$$

imenujemo *naravna projekcija*.

6. Naj bo $A \subseteq S$. Preslikavo

$$\chi_A: S \longrightarrow \{0, 1\}, \forall x \in S: \chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

imenujemo *karakteristična funkcija* množice A glede na univerzalno množico S.

Definicija. Naj bo $f: A \longrightarrow B$.

1. f je *injektivna*, če $\forall x, y \in A: (f(x) = f(y) \implies x = y)$.

2. f je *surjektivna*, če je $\mathrm{Z}_f = B$.

3. f je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Definicija. Preslikavo $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \longrightarrow B$ imenujemo tudi *funkcija* n *spremenljivk*. Tedaj namesto $f((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ pišemo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Kot za vsako relacijo tudi za funkcijo f obstaja *inverzna relacija* f^{-1}.

Trditev.

1. Naj bo f funkcija. Potem velja: f^{-1} je funkcija $\iff$ f injektivna.

2. Naj bo $f: A \rightarrow B$. Potem velja: $f^{-1}: B \rightarrow A$ $\iff$ f bijektivna.

Trditev.

1. Če sta f in g funkciji, je tudi $f \circ g$ funkcija in za vse $x \in \mathrm{D}_{f \circ g}$ velja:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2. Naj bo $g: A \longrightarrow B$ in $f: B \longrightarrow C$. Potem $f \circ g: A \longrightarrow C$.

Trditev. Naj bo $f: A \longrightarrow B$. Potem je $f \circ \mathrm{id}_A = f$ in $\mathrm{id}_B \circ f = f$.

Trditev. Naj bo $g: A \longrightarrow B$ in $f: B \longrightarrow C$. Potem velja:

1. f, g injektivni $\implies$ $f \circ g$ injektivna.

2. f, g surjektivni $\implies$ $f \circ g$ surjektivna.

3. $f \circ g$ injektivna $\implies$ g injektivna.

4. $f \circ g$ surjektivna $\implies$ f surjektivna.

4\. 1. 2014

Trditev. Naj bo $f: A \longrightarrow B$ in naj bo f^{-1} njena inverzna relacija. Potem velja:

1. $f^{-1} \circ f = K_f$,

2. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Z}_f}$,

3. f injektivna $\iff$ $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$,

4. f surjektivna $\iff$ $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

Izrek. Naj bo $f: A \longrightarrow B$ in $g: B \longrightarrow A$. Če je $g \circ f = \mathrm{id}_A$ in $f \circ g = \mathrm{id}_B$, potem sta f in g bijekciji in $g = f^{-1}$.

Za preslikavo $f: A \rightarrow B$ smo definirali ***sliko*** $f[A_1]$ podmnožice $A_1 \subseteq A$ in ***prasliko*** $f^{-1}[B_1]$ podmnožice $B_1 \subseteq B$. Ogledali smo si nekaj lastnosti slik in praslik.

Družino množic z indeksno množico I smo definirali kot surjektivno preslikavo $\mathrm{A}: \mathrm{I} \rightarrow M$, kjer je M neka množica množic. Za $\lambda \in \mathrm{I}$ namesto $\mathrm{A}(\lambda)$ pišemo A_λ, družino pa označujemo z $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{I}}$. Družina $(A_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{I}}$ je *prazna*, če je $\mathrm{I} = \emptyset$.

Definicija.

1. ${}_{\lambda\in \mathrm{I}}A_\lambda=\{x;\ \exists\lambda\in \mathrm{I}: x\in A_\lambda\}$ (unija družine)

2. Če $\mathrm{I}\neq\emptyset$: ${}_{\lambda\in \mathrm{I}}A_\lambda=\{x;\ \forall\lambda\in \mathrm{I}: x\in A_\lambda\}$ (presek neprazne družine)

3. $\prod_{\lambda\in \mathrm{I}}A_\lambda=\{f: \mathrm{I}\rightarrow \cup_{\lambda\in \mathrm{I}}A_\lambda;\ \forall\lambda\in \mathrm{I}: f(\lambda)\in A_\lambda\}$ (kartezični produkt družine)

Elemente kartezičnega produkta družine imenujemo *funkcije izbire* za družino.

Aksiom izbire (AC): Kartezični produkt poljubne družine nepraznih množic je neprazen.