Strukture urejenosti

Definicija. Naj bo R dvomestna relacija v A.

1. R ***delno ureja*** A, če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.

2. R ***linearno ureja*** A, če delno ureja A in je sovisna.

Če R delno ureja A, namesto xRy pogosto pišemo $x \leq y$ in beremo: x *je pod* y.

Relaciji delne urejenosti $\leq$ v A priredimo relacijo *stroge delne urejenosti* ($x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$) in relacijo *neposrednega predhodnika* ($x <\cdot\ y \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z \in A$: $(x < z \wedge z < y)$).

Končno delno urejeno množico grafično predstavimo s *Hassejevim diagramom.*

10. 1. 2014

Definirali smo *minimalne*, *maksimalne*, *prve* in *zadnje* elemente v delno urejeni množici. Ugotovili smo, da ima delno urejena množica največ en prvi element in največ en zadnji element. Prvi elementi so tudi minimalni, zadnji elementi pa so maksimalni. V linearno urejeni množici velja tudi obratno.

Definirali smo *zgornje meje, spodnje meje* ter *natančne zgornje meje* in *natančne spodnje meje* podmnožic v delno urejenih množicah.

Linearno urejeno podmnožico delno urejene množice imenujemo *veriga*.

Zornova lema. Če ima v delno urejeni množici *A* vsaka veriga zgornjo mejo, ima *A* vsaj en maksimalen element.

Zornovo lemo dokažemo z uporabo aksioma izbire. Kot zgled uporabe Zornove leme v algebri smo dokazali, da ima vsak vektorski prostor bazo.

Definicija. Relacija *R* ***dobro ureja*** množico *A*, če jo delno ureja in ima vsaka neprazna podmnožica *A* prvi element.

Ugotovili smo, da je relacija dobre urejenosti sovisna, torej je tudi relacija linearne urejenosti.

Izrek o dobri urejenosti. Za vsako množico obstaja relacija, ki jo dobro ureja.

Izrek dokažemo z uporabo aksioma izbire ali Zornove leme.

Definicija. Delno urejena množica *A* je ***mreža***, če ima vsaka njena podmnožica z dvema elementoma natančno zgornjo mejo in natančno spodnjo mejo v *A*.