Logika in množice: vaje

23. november 2009

Naloga 1

Zapiši bijekcije, ki dokazujejo, naslednje izomorfizme med množicami:

1. $A + B \cong B + A$
2. $A + \emptyset \cong A$
3. $A^{B+C} \cong A^B \times A^C$
4. $A^{B \times C} \cong (A^B)^C$

Rešitev: nalogo rešujemo tako, kot smo podobne naloge reševali na predavanjih: zapišemo preslikavi f in g med obema množicama in preverimo, da velja $f \circ g = \mathrm{id}$ in $g \circ f = \mathrm{id}$. Načeloma bi lahko tudi zapisali samo funkcijo f in preverili, da je bijekcija, a je to nepraktično.

Spomnimo se, da so elementi vsote $M + N$ bodisi oblike $\iota_1(x)$ za $x \in M$ bodisi $\iota_2(y)$ za $y \in N$. Torej funkcijo h z domeno $M+N$ definiramo z dvema primeroma, ki določita vrednosti $h(\iota_1(x))$ za $x \in M$ in $h(\iota_2(y))$ za $y \in N$.

1. Funkciji $f : A + B \to B + A$ in $g : B + A \to A + B$ sta definirani s predpisi

$$\begin{aligned} f(\iota_1(x)) &= \iota_2(x), \qquad (x \in A) \\ f(\iota_2(y)) &= \iota_1(y), \qquad (y \in B) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} g(\iota_1(u)) &= \iota_2(u), \qquad (u \in B) \\ g(\iota_2(v)) &= \iota_1(v), \qquad (v \in A) \end{aligned}$$

Preverimo, da sta inverza drug drugemu (na vajah seveda ni treba narediti vseh štirih primerov, treba pa je povedati, katere štiri primere je treba preveriti):

$$\begin{aligned} g(f(\iota_1(x))) &= g(\iota_2(x)) = \iota_1(x), \\ g(f(\iota_2(y))) &= f(\iota_1(y)) = \iota_2(y), \\ f(g(\iota_1(u))) &= f(\iota_2(u)) = \iota_1(u), \\ f(g(\iota_2(v))) &= f(\iota_1(v)) = \iota_2(v). \end{aligned}$$

2. Funkciji $f : A + \emptyset \to A$ in $g : A \to A + \emptyset$ definiramo s predpisoma

$$\begin{aligned} f(\iota_1(x)) &= x, \qquad (x \in A) \\ g(x) &= \iota_1(x). \end{aligned}$$

Opomba: primera $f(\iota_2(y))$ nam ni treba obravnavati, ker prazna množica nima elementov. Ti funkciji sta inverza, kar preverimo takole (spet ni treba obravnavati primera $\iota_2(y)$ za $y \in \emptyset$, tu se spomnimo, da $\forall y \in \emptyset .\, f(\iota_2(y)) = y$ avtomatično velja zaradi prazne kvantifikacije):

$$\begin{aligned} g(f(\iota_1(x))) &= g(x) = \iota_1(x), \\ f(g(x)) &= f(\iota_1(x)) = x. \end{aligned}$$

3. Funkciji $F : A^{B+C} \to A^B \times A^C$ in $G : A^B \times A^C$ definiramo s predpisi

$$F(h) = (\ell_1, \ell_2), \quad \text{kjer je } \ell_1(y) = h(\iota_1(y)) \text{ in } \ell_2(z) = h(\iota_2(z)).$$

$G(k_1, k_2)(\iota_1(y)) = \ell_1(y),$

$G(k_1, k_2)(\iota_2(z)) = \ell_2(z)$

Preverimo, da smo dobili inverza:

$$\begin{aligned} F(G(k_1, k_2)) &= (\ell_1, \ell_2), \quad \text{kjer je} \\ \ell_1(y) &= G(k_1, k_2)(\iota_1(y)) = k_1(y), \\ \ell_2(z) &= G(k_1, k_2)(\iota_2(z)) = k_2(z). \end{aligned}$$

V drugo smer:

$$\begin{aligned} G(F(h))(\iota_1(y)) &= G(\ell_1, \ell_2)(\iota_1(y)) = \ell_1(y) = h(\iota_1(y)), \\ G(F(h))(\iota_2(z)) &= G(\ell_1, \ell_2)(\iota_2(z)) = \ell_2(z) = h(\iota_2(z)). \end{aligned}$$

4. Funkcijo $F : A^{B \times C} \to (A^B)^C$ in $G : (A^B)^C \to A^{B \times C}$ definiramo s predpisoma

$$\begin{aligned} F(h)(z)(y) &= h(y, z), \\ G(k)(y, z) &= k(z)(y). \end{aligned}$$

Preverimo, da sta inverza:

$$\begin{aligned} F(G(k))(z)(y) &= G(k)(y, z) = k(y)(z), \\ G(F(h))(y, z) &= F(h)(z)(y) = h(y, z). \end{aligned}$$

Naloga 2

Na predavanjih smo definirali monomorfizme in epimorfizme ter dokazali, da sovpadajo z injektivnimi in surjektivnimi preslikavami.

Dani sta funkciji

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Dokaži:

1. Če je $g \circ f$ injektivna, je f injektivna.
2. Če je $g \circ f$ surjektivna, je g surjektivna.

Namig: uporabi dejstvo, da smemo injekcije krajšati na levi in surjekcije na desni.

Rešitev:

1. Denimo, da je $g \circ f$ injektivna. Torej je monomorfizem in jo smemo krajšati na levi. Dokažimo, da je f monomorfizem. Naj bosta $h, k : D \to A$ poljubni. Tedaj velja:
$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow g \circ f \circ h = g \circ f \circ k \Rightarrow h = k.$$
2. Denimo, da je $g \circ f$ surjektivna. Torej je epimorfizem in jo smemo krajšati na desni. Dokažimo, da je g epimorfizem. Naj bosta $h, k : C \to D$ poljubni. Tedaj velja:
$$h \circ g = k \circ g \Rightarrow h \circ g \circ f = k \circ g \circ f \Rightarrow h = k.$$

Naloga 3

1. Poišči množico N z vsaj dvema elementoma, za katero velja $N = N + N$.
2. Poišči množico B z vsaj dvema elementoma, za katero velja $B \cong B \times B$. Namig: obravnavaj množico $B = N^N$, kjer je N iz prejšnjega primera.

Rešitev:

1. $N = \mathbb{N}$ ter bijekciji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} + \mathbb{N}$ in $g : \mathbb{N} + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirani z
$$f(n) = \begin{cases} \iota_1(k) & \text{če je } n = 2k, \\ \iota_2(k) & \text{če je } n = 2k+1. \end{cases}$$
$$g(\iota_1(k)) = 2k$$
$$g(\iota_2(k)) = 2k+1$$
2. Za $B = N^N$ velja $B \times B = N^N \times N^N \cong N^{N+N} \cong N^N = B$, pri čemer je treba poudariti, da smo uporabili dejstvo
$$X \cong U \wedge Y \cong V \Rightarrow X^Y \cong U^V.$$