MEHANIKA I - sinopsis predavanj za študente matematike v letu 2012/2013

5. 10. 12 OSNOVE NEWTONOVE MEHANIKE

Literatura

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičku mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 1-3.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 1-11.

Definicija Množica $\mathcal{A}$ je afini prostor nad vektorskim prostorom $\mathcal{V}$, če obstaja operacija $\mathcal{A} \times \mathcal{V} \to \mathcal{A}$, $(A, \vec{a}) \mapsto A + \vec{a}$, tako da velja:
a) $(A + \vec{a}) + \vec{b} = A + (\vec{a} + \vec{b})$
b) za poljubni točki $A, B \in \mathcal{A}$ obstaja natanko določen $\vec{a} \in \mathcal{V}$, tako da velja $B = A + \vec{a}$.
Definicija Nad $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ je definirana operacija $B - A = \vec{a} \iff B = A + \vec{a}$.
Trditev Velja
a) $A - A = \vec{0}$,
b) $(A - B) + (B - A) = \vec{0}$,
c) $(A - B) + (B - C) + (C - A) = \vec{0}$,
d) $(A + \vec{a}) - B = (A - B) + \vec{a}$.
Zapis afine preslikave.
Definicija Galilejeva struktura $\mathcal{G}$ je trojica $(\mathcal{A}, t, \rho)$, kjer je
a) $\mathcal{A}$ štiri dimenzionalni afini prostor nad vektorskim prostorom $\mathcal{V}$,
b) $t \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$,
c) ρ evklidska razdalja na $\operatorname{Ker} t$.
Elementom prostora $\mathcal{A}$ pravimo dogodki. Če velja $t(A - B) = 0$ pravimo, da sta dogodka A in B istočasna. Nad afinim prostorom istočasnih dogodkov je s c) definirana evklidska razdalja.
Definicija Galilejevi strukturi $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, t, \rho)$ in $\tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{t}, \tilde{\rho})$ sta ekvivalentni, če obstaja bijekcija $g : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ tako, da je g afina preslikava, ki ohranja časovnost dogodkov in razdaljo med istočasnimi dogodki. Preslikavi g pravimo Galilejeva transformacija.
Naravna Galilejeva struktura na $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$.
Izrek Galilejeva transformacija $(t, P) \mapsto (t', P')$ med dvema naravnima Galilejevima strukturama na $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ je oblike:

$$t' = t + t'_0$$
$$P' = \vec{c}t + Q(P - P_0) + P'_0.$$

Grupa Galilejevih transformacij. transformaciji.

14. 10. 11 **Literatura**

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičku mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 6-10.
- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 1-11.

Vektor hitrosti, pospeška; transformacija vektorja hitrosti in pospeška pri Galilejevi transformaciji.
Sistem materialnih točk.
Princip determiniranosti Trajektorija $\mathbf{P}(t)$ sistema N materialnih točk je v danem koordinatnem sistemu natanko določena z začetnim položajem $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{E}^N$ in začetno hitrostjo $\dot{\mathbf{P}}_0 \in \mathbb{R}^{3N}$. To pomeni, da obstaja funkcija interakcije $\mathbf{f}$, tako da velja $\ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}})$.
Princip relativnosti Obstaja tak Galilejev razred koordinatnih sistemov, da je funkcija interakcije invariantna za Galilejeve transformacije. Koordinatnim sistemom iz tega razreda pravimo inercialni koordinatni sistemi.
Posledice principa determiniranosti in relativnosti: homogenost časa, prostora, prostora hitrosti, izotropičnost prostora.

Primer $N = 2$.
Primer $N = 1$; prvi Newtonov zakon: v razredu inercialnih koordinatnih sistemov se izolirana materialna točka giblje premočrtno s konstantno hitrostjo.
Princip sorazmernosti Naj bo $\mathcal{P}$ sistem materialnih točk P_i. Za poljuben par točk P_i, P_j iz $\mathcal{P}$, ki tvori zaprt sistem obstaja, ne glede na vrsto interakcije, pozitivna konstanta k_{ji} tako, da velja $\ddot{P}_i = -k_{ji}\ddot{P}_j$.
Za števila k_{ij} velja $k_{ij}k_{jk}k_{ki} = 1$.
Tretji Newtonov zakon.
Lema Naj za števila k_{ij} velja
 a) $k_{ij} > 0$
 b) $k_{ji} = 1/k_{ij}$
 c) $k_{ij}k_{jk}k_{ki} = 1$.
Potem obstajajo števila, $m_i > 0$, tako da velja $k_{ij} = m_i/m_j$.
Pojem inercijske mase, pojem sile.
Gravitacijski zakon, gravitacijska masa.
Newtonov eksperiment, enakost inercijske in gravitacijske mase.

19. 10. 12 **Literatura**

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičku mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 6-10.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, it Classical dynamics : a contemporary approach, Cambridge University Press, 1998, 6-9.

Momenti, gibalna količina $\vec{p} = \vec{p}(P) = m\frac{dP}{dt}$, vrtilna količina $\vec{l} = \vec{l}(O, P) = (P - O) \times \vec{p}$.
Delo, kinetična energija.
Izrek Delo, ki ga opravi sila na materialno točko pri gibanju vzdolž tira, je enako razliki kinetične energije.
Potencialna sila, konzervativna sila.
Izrek(Izrek o energiji) Naj bo $\vec{F}$ konzervativna sila. Potem je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

PREMOČRTNO GIBANJE
Pišimo $\vec{F} = f\vec{i}$ in naj bo $f = f(x)$ zvezna funkcija. Potem je $T + U = E$ integral gibanja in gibanje je integrabilno. Velja

$$t = t_0 + \operatorname{sgn}\dot{x}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}.$$

Kvalitativna analiza gibanja, točka obrata, periodično gibanje, neomejeno gibanje.
Omejeno premočrtno gibanje je periodično.
Perioda periodičnega gibanja

$$T = \sqrt{2m}\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

Ravnovesna lega, stabilna, nestabilna ravnovesna lega.
Primer: izračun periode za $U(x) = \alpha x^2 + \beta x^{-2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; izračun integrala

$$\int_a^b\frac{du}{\sqrt{(b-u)(u-a)}} = \pi.$$

Izokronično gibanje.

28. 10. 11 **Literatura**

- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 15-22.
- Greiner,W., *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity*, Springer, 2004, 229-240.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, it Classical dynamics : a contemporary approach, Cambridge University Press, 1998, 18-22.
- Landau, L.D., in Lifshitz, E. M., *Mechanics* , Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, 25-29.

Fazna ravnina, fazni portret.
Lema Za omejeno premočrtno gibanje velja $\frac{dS}{dE} = \frac{1}{m}T$. Tu je S ploščina pripadajočega lika v fazni ravnini, T pa perioda gibanja.
Primer: harmonično gibanje.
Aproksimacija s harmoničnim gibanjem.
Libracijsko gibanje, uvedba nove spremenljivke $x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\theta$, pisava $\frac{2}{m}(E - U(x)) = (b-x)(x-a)\varphi(x) \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\varphi(\theta)}$.

GIBANJE PO KRIVULJI
Ločna dolžina, ukrivljenost.
Tangencialni pospešek, normalni pospešek; $\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n$.
Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{S}$, sila vezi $\vec{S}$.
Idealno gibanje po krivulji
Sila vezi, delo sile vezi, idealna vez; redukcija na premočrtno gibanje.
Primer: matematično nihalo.
Ocena nihajnega časa matematičnega nihala:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \leq T \leq \frac{1}{\cos\frac{\theta_0}{2}} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Približen izračun periode

$$T \approx \pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(a)}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi(b)}}\right).$$

Primer: matematično nihalo

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{\theta_0}{\sin\theta_0}}.$$

30. 10. 12 **Literatura**

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 76-82, 85-90.
- Greiner,W., *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity*, Springer, 2004, 246-257.

Gibanje po negladki krivulji.

GIBANJE V POLJU CENTRALNE SILE
Definicija Sila $\vec{F}$ je centralna, če obstaja točka O (center sile) tako, da velja $\vec{F} = F(|P-O|)(P-O)/|P-O|$.
Izrek Konzervativna sila je centralna $\iff$ obstaja točka O tako, da je $\vec{l}(O,P)$ je konstanten.
Izrek Gibanje v polju centralnih sil je ravninsko. Tir leži v ravnini, ki gre skozi O in ima normalo v smeri $\vec{l}(O,P)$.
Ploščinska hitrost, zveza $l = \left|\vec{l}\right| = mC_0$, kjer je C_0 dvojna ploščinska hitrost.
Izrek Gibanje v polju centralne sile ima dve konstanti gibanja, energijo in ploščinsko hitrost.
Kinematika gibanja v polarnem koordinatnem sistemu.
Zgodovinski oris, Tycho Brahe (1545-1601), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1643-1727); Keplerjevi zakoni.

Trditev Če je ploščinska hitrost konstantna, je obodni pospešek enak nič.
Binetova formula
$$a_r = -C_0^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right).$$

Trdtev Če je tir elipsa, je radialni pospešek obratno sorazmeren kvadratu oddaljenosti do centra sil.
Trditev Kvocient C_0^2/p je konstanten za vse planete v osončju,

9. 11. 12 **Literatura**

- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 34-42.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 90-102.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 77-92.

Redukcija na premočrtno gibanje koordinate r, efektivni potencial $U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$.
Določitev trajektorije s kvadraturami.
Določitev tira $\theta = \theta(r)$
$$\theta = \theta_0 + \operatorname{sgn} \dot{r} \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - U(r)}}.$$

Primer: gibanje v polju gravitacijske sile $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$. Formula
$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0 + \pi/2)}, \qquad p = \frac{l^2}{m\gamma}, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\gamma^2}},$$

kjer je θ_0 polarni kot do lokalnega minimuma efektivnega potenciala.
Kvalitativna analiza gibanja v polju centralne sile, apsidni radij, pericenter, apocenter, apsidni kot $\Delta\theta$.
Trditev Tir je simetričen glede na apsidni radij.
Trditev Tir se dotika apsidnih krožnic.
Pogoj zaprtosti tira $W = \Delta\theta/\pi \in \mathbb{Q}$.
Velja: če omejeni tir ni zaprt je gosta množica v kolobarju med apsidnima radijema.
Bertrandov izrek: edina potenciala za katera je vsak omejen tir tudi zaprt sta gravitacijski in Hookov.
Določitev trajektorije, Keplerjeva enačba, razvoj v potrnčno vrsto po ϵ.

16.11.12 GIBANJE V RELATIVNEM KOORDINATNEM SISTEMU
Literatura

- Aganovič, Veselič, *Uvod v analitičku mehaniku*, Matematički odjel Prirodoslovnog-matematičkog fakulteta, Zagreb, 1990 35-36.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 164-166.

Definicija Soredje $\varphi(t, P)$ se giblje glede na soredje $\varphi'(t', P')$, če obstaja trojica (P_0, P_0', Q), $P_0 \in \mathbb{E}$, $P_0' : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$, $Q : \mathbb{R} \to SO(3)$, tako da velja $t' = t$ in $P' = P_0'(t) + Q(t)(P - P_0)$.
Absolutni, relativni koordinatni sistem; pisava $\vec{\zeta} = P - P_0$, $\vec{\zeta}\,' = Q\vec{\zeta}$, $P' = P_0' + Q\vec{\zeta} = P_0' + \vec{\zeta}\,'$.
Translacijsko gibanje, rotacijsko gibanje.
Trditev Rotacijski del gibanja je neodvisen od centra gibanja.
Trditev $Q^T\dot{Q}$ je poševno simetrični tenzor.
Trditev Naj bo W poševno simetrični tenzor iz $\mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}^3$. Potem obstaja vektor $\vec{\omega}$ tako, da je $W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ za vsak $\vec{a}$. Vektorju $\vec{\omega}$ pravimo osni vektor tenzorja W.
Trditev $W_{ij} = -e_{ijk}\omega_k$.
Definicija Osnemu vektorju $\vec{\omega}$ tenzorja $Q^T\dot{Q}$ pravimo rotacijski vektor. Vektor kotne hitrosti rotacije Q je $\vec{\omega}\,' = Q\vec{\omega}$.
Trditev Vektor kotne hitrosti rotacije za kot $\varphi = \varphi(t)$ okrog stalne osi $\vec{e}$ je $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}$.

Trditev Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri med seboj linearno neodvisni vektorji in $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3)$. Potem

$$\det A = \frac{(A\vec{a}, A\vec{b}, A\vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Trditev Naj bo $A \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3)$ neizrojena. Potem

$$(A\vec{a}) \times (A\vec{b}) = (\det A)\, A^{-T}(\vec{a} \times \vec{b}) = A^*(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Izrek Naj bo $Q \in SO(3)$. Potem $Q(\vec{a} \times \vec{b}) = (Q\vec{a}) \times (Q\vec{b})$.

23. 11. 12 **Literatura**

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 3-38.

Trditev Osni vektor poševno simetričnega tenzorja $\dot{Q}Q^T$ je vektor kotne hitrosti rotacije Q.
Trditev $(Q\vec{u})^{\cdot} = Q\dot{\vec{u}} + \vec{\omega}\,' \times \vec{u}\,'$.
Relativna hitrost $\vec{v}_{\mathrm{rel}} = \dot{\vec{\zeta}}$, $\vec{v}\,'_{\mathrm{rel}} = Q\vec{v}_{\mathrm{rel}} = (\dot{\vec{\zeta}})'$, povezava med absolutno in relativno hitrostjo

$$\vec{v}\,' = \vec{v}\,'_0 + Q(\vec{\omega} \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\mathrm{rel}}) = \vec{v}\,'_0 + \vec{\omega}\,' \times \vec{\zeta}\,' + \vec{v}\,'_{\mathrm{rel}}.$$

Relativni pospešek $\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \ddot{\vec{\zeta}} = \ddot{\zeta}^i \vec{e}_i$, $\vec{a}\,'_{\mathrm{rel}} = \ddot{\zeta}^i \vec{e}\,'_i$, povezava med absolutnim in relativnim pospeškom

$$\vec{a}\,' = \vec{a}\,'_0 + Q(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}} + \vec{a}_{\mathrm{rel}}) = \vec{a}\,'_0 + \vec{\omega}\,' \times (\vec{\omega}\,' \times \vec{\zeta}\,') + \dot{\vec{\omega}}\,' \times \vec{\zeta}\,' + 2\vec{\omega}\,' \times \vec{v}\,'_{\mathrm{rel}} + \vec{a}\,'_{\mathrm{rel}}.$$

Sistemski, Coriolisov, centrifugalni pospešek.
Newtonova enačba v absolutnem koordinatnem sistemu $m\vec{a}\,' = \vec{F}\,'$, v relativnem koordinatnem sistemu

$$m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{rel}},$$

kjer je $\vec{F} = Q^T \vec{F}\,'$ in $\vec{a}_0 = Q^T \vec{a}\,'_0$.
Translacijska sila, centrifugalna sila, inercijska sila rotacije, Coriolisova sila.
Trditev Če je $\vec{F}\,'$ potencialna sila, je tudi $\vec{F}$ potencialna.
Primer: Foucaultovo nihalo.

30. 11. 12 SISTEM MATERIALNIH TOČK
Literatura

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 66-73.
- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 5-11.

Primer Foucaultovo nihalo do konca.
Masno središče $P_* = O + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^N m_i(P_i - O)$.
Trditev Masno središče je neodvisno od izbire koordinatnega izhodišča O.
Notranje sile, zunanje sile.
Enačba gibanja masnega središča $m\ddot{P}_* = \vec{F}$.
Vrtilna količina $\vec{L} = \vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}(O, P_i)$.
Navor zunanjih sil $\vec{N} = \vec{N}(O) = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \vec{F}_i$.
Centralnost notranjih sil:

$$\vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ji}(P_i, P_j) = F_{ji}(\mid P_i - P_j \mid) \frac{P_i - P_j}{\mid P_i - P_j \mid}.$$

Izrek o vrtilni količini: Če so notranje sile centralne, je odvod vrtilne količine okoli fiksnega pola enak navoru zunanjih sil okoli tega pola.

Potencial notrajnih sil

$$U_{ji}(P_i, P_j) = -\int_{r_0}^{|\,P_i - P_j\,|} F_{ji}(r)\,dr, \quad U = \sum_{i<j} U_{ji}.$$

Energijski princip $\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \dot{P}_i$.
Zaprti sistem
Zakon o ohranitvi gibalne količine, vrtilne količine, 10 klasičnih konstant gibanja.
Primer: problem dveh teles.

7. 12. 12 **Literatura**

- Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd. ed., Springer-Verlag, New York, 1995, 44-50.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 73-79, 190-215.

Odvisnost vrtilne količine od pola : $\vec{L}(P_0) = \vec{L}(O) + (O - P_0) \times m\dot{P}_*$.
Pisava: $P_i = P_0 + \vec{\zeta}_i$
Vrtilna količina relativnega gibanja okoli P_0: $\vec{\mathcal{L}} = \vec{\mathcal{L}}(P_0) = \sum_i \vec{\zeta}_i \times m_i \dot{\vec{\zeta}}_i$.
Trditev $\frac{d}{dt}\vec{L}(P_0) = \vec{N}(P_0) - m\dot{P}_0 \times \dot{P}_*$.
Trditev $\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{N}(P_0) - (P_* - P_0) \times m\ddot{P}_0$.
Posebna primera : $P_0 = P_*$, $\ddot{P}_0 = \vec{0} \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{N}(P_0)$.
Odvisnost kinetične energije od izbire centra gibanja.
Koenigov izrek $T = T_{\mathrm{rel}} + \frac{1}{2}m\Big|\,\dot{P}_*\,\Big|^2$.

TOGO TELO

Definicija Gibanje $t \to P(t)$ točk sistema $\{\mathcal{P}\}$ je togo, če za poljubni točki $P_1, P_2 \in \{\mathcal{P}\}$ velja $|\,P_1(t) - P_2(t)\,| = konst.$
Opis togega gibanja: rotacija + translacija.
Izrek Izometrija je afina preslikava.
Opis togega gibanja kot relativno gibanje: telesni KS = položaj v $t = 0$, prostorski položaj = trenutni položaj. Prostorski KS(PKS), telesni KS(TKS).
Pisava $P' = P(t)$, $P = P(t = 0)$.
Posplošitev sistema materialnih točk na kontinuum mnogo točk, pojem togega telesa.
Izrek Za masno središče telesa $\mathcal{B}$ velja $\frac{dP'_*}{dt} = \dot{P}'_*$ in $\frac{d\dot{P}'_*}{dt} = \ddot{P}'_*$.
Aksiom gibanja togega telesa: dinamične enačbe togega telesa so:

i) enačba gibanja masnega središča: $m\ddot{P}'_* = \vec{F}'$;
ii) izrek o vrtilni količini: $\frac{d\vec{L}'(O)}{dt} = \vec{N}'(O)$;
iii) $\vec{N}'(O') = \vec{N}'(P'_0) + (P'_0 - O') \times \vec{F}'$.

14. 12. 12 **Literatura**

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 190-215.

Vrtilna količina relativnega gibanja v absolutnem koordinatnem sistemu $\vec{\mathcal{L}}'$.
Prostorski vztrajnostni tenzor $\underline{\underline{J'}}$.
Tenzorski produkt: tenzorski produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je linearna preslikava $\vec{a} \otimes \vec{b}$ definirana z $\vec{r} \mapsto (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{r} = (\vec{b} \cdot \vec{r})\vec{a}$.
Trditev Velja

a) $(\underline{\underline{A}})\vec{a} \otimes \vec{b} = (\underline{\underline{A}}\vec{a}) \otimes \vec{b}$;
b) $(\vec{a} \otimes \vec{b})\underline{\underline{A}} = \vec{a} \otimes (\underline{\underline{A}}^T \vec{b})$;

c) $(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}$.
Telesni vztrajnostni tenzor, zveza $\underline{\underline{J}}' = Q\underline{\underline{J}}Q^T$.
Velja $\vec{\mathcal{L}}' = \underline{\underline{J}}'\vec{\omega}'$.
Vztrajnostni moment $J_e = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}}\vec{e}$ okoli osi $\vec{e}$, deviacijski momenti $\underline{\underline{D}}$.
Trditev Tenzor $\underline{\underline{J}}$ je pozitiven. Če telo ni tanka palica, je pozitivno definiten.
Diagonalizacija vztrajnostnega tenzorja, glavne osi, glavni momenti.
Izrek (Steiner) $\underline{\underline{J}}(P_0) = \underline{\underline{J}}(P_*) + m|\, P_0 - P_* \,|^2 \underline{\underline{I}} - m(P_0 - P_*) \otimes (P_0 - P_*)$.
Komponentni zapis vztrajnostnega tenzorja.
Trditev Prehod na novo bazo; $\vec{e}_i^{\,\star} = \alpha_i{}^j \vec{e}_j \Longrightarrow J^\star_{ij} = \alpha_i{}^k \alpha_j{}^k J_{kl}$.
Trditev Normala na ravnino zrcalne simetrije skozi P_0 je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{\underline{J}}(P_0)$.
Trditev Če ima telo dve ravnini zrcalne simetrije skozi P_0, je presek ravnin simetrij glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{\underline{J}}(P_0)$.
Primer: vztrajnostni tenzor krožnega valja.

21. 12. 12 **Literatura**

- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 220-226.

Kinetična energija togega telesa $T = \frac{1}{2}m|\,\vec{v}_*\,|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}(P_*)\vec{\omega}$.
Eulerjeve dinamične enačbe $\underline{\underline{J}}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{\underline{J}}\vec{\omega} = \vec{N}$.
Komponentni zapis Eulerjevih dinamičnih enačb.
a) v lastnem koordinatnem sistemu vztrajnostnega tenzorja;
b) v koordinatnem sistemu s koordinatno osjo v smeri stalne osi rotacije.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= J_{13}\ddot{\varphi} - J_{23}\dot{\varphi}^2 \\
N_2 &= J_{23}\ddot{\varphi} + J_{13}\dot{\varphi}^2 \\
N_3 &= J_{33}\ddot{\varphi}
\end{aligned}
$$

Trditev Če je gostota $\vec{f}$ volumenske sile $\vec{F}$ konstantna, torej $\vec{F} = \int_{\mathcal{B}} \vec{f}\, dm = \vec{f}m(\mathcal{B})$, je navor $\vec{N}(P_0)$ volumenske sile enak navoru rezultante $\vec{F}$ s prijemališčem v masnem središču:

$$\vec{N}(P_0) = \int_{\mathcal{B}} (P - P_0) \times \vec{f}\, dm = (P - P_*) \times \vec{F}.$$

Definicija Telo $\mathcal{B}_1$ se kotali po telesu $\mathcal{B}_2$, če sta hitrosti telesa v dotikališču enaki.
Primer: kotaljenje valja po strmini, sila kotaljenja.
Primer : vrtenje telesa okrog stalne osi, določitev sil v ležajih.

13. 1. 13 **Literatura**

- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 205-213.
- Greiner, W., *Classical Mechanics: System of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer, 2003, 249-252.
- Jose, Jorge V. in Saletan, Eugene, *Classical dynamics : a contemporary approach*, Cambridge University Press, 1998, 526-533.

Energijski princip: $\frac{dT}{dt} = \vec{v}_*' \cdot \vec{F}' + \vec{\omega}' \cdot \vec{N}'(P_*') = \vec{v}_* \cdot \vec{F} + \vec{\omega} \cdot \vec{N}(P_*)$.
Trditev Za togo telo velja izrek o delu.
Prosta vrtavka
Binetov elipsoid, presek Binetovega elipsoida s sfero; gibanje vektorja vrtilne količine po Binietovem elipsoidu.
Posebni primer: enakomerna rotacija; stabilnost enakomerne rotacije.
Osnosimetrična prosta vrtavka: analitična obravnava; precesija vektorja kotne hitrosti okoli osi simetrije.
Eulerjevi koti
φ - precesija, θ - nutacija, ψ - kot lastne rotacije.

Eulerjeva rotacija $R = R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}, \psi, \theta, \varphi) := R(\vec{k}_2, \psi)R(\vec{i}_1, \theta)R(\vec{k}, \varphi)$; $\vec{i}_1 = R(\vec{k}, \varphi)\vec{i}$, $\vec{k}_2 = R(\vec{i}_1, \theta)\vec{k}$.
Lema $R(R(\vec{e}, \varphi)\vec{f}, \theta)R(\vec{e}, \varphi) = R(\vec{e}, \varphi)R(\vec{f}, \theta)$.
Definicija Za dane osi $\vec{f}_k$ in kote φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ pišemo $\vec{f}_k^{(0)} = \vec{f}_k$ in $\vec{f}_k^{(l)} = R(\vec{f}_l^{(l-1)}, \varphi_l)\vec{f}_k^{(l-1)}$ za $k = l+1, \ldots, n$. Definiramo kompozitum rotacij okrog zarotiranih osi

$$R(\vec{f}_n, \ldots, \vec{f}_1, \varphi_n, \ldots, \varphi_1) = R(\vec{f}_n^{(n-1)}, \varphi_n) \circ \ldots \circ R(\vec{f}_2^{(1)}, \varphi_2)R(\vec{f}_1, \varphi_1).$$

Izrek

$$R(\vec{f}_n, \ldots, \vec{f}_1, \varphi_n, \ldots, \varphi_1) = R(\vec{f}_1, \varphi_1) \circ \ldots \circ R(\vec{f}_{n-1}, \varphi_{n-1})R(\vec{f}_n, \varphi_n).$$

Primer: Eulerjeva rotacija

$$R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}, \psi, \theta, \varphi) = R(\vec{k}_2, \psi)R(\vec{i}_1, \theta)R(\vec{k}, \varphi) = R(\vec{k}, \varphi)R(\vec{i}, \theta)R(\vec{k}, \psi).$$

Izrek Vsako rotacijo, z izjemo rotacije Q za katero je $Q\vec{k} \parallel \vec{k}$, moremo enolično zapisati kot Eulerjevo rotacijo $R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; \psi, \theta, \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$.

11\. 1. 13 **Literatura**

- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 213-218

Izrek Vektor kotne hitrosti rotacije $R(\vec{f}_n, \ldots, \vec{f}_1, \varphi_n, \ldots, \varphi_1)$ je $\vec{\omega}\,' = \sum_k \dot{\varphi}_k \vec{f}_k^{(k-1)}$. Z besedami, vektor kotne hitrosti sestavljene rotacije je vsota kotnih hitrosti okoli trenutnih osi rotacij.
Primer: vektor kotne hitrosti Eulerjeve rotacije v prostorskih baznih vektorjih $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je

$$\vec{\omega}\,' = (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\vec{i} + (\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi)\vec{j} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k}.$$

Izrek $R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; \psi, \theta, \varphi)^T = R(\vec{k}, \vec{i}, \vec{k}; -\varphi, -\theta, -\psi)$.
Trditev Osni vektor Eulerjeve rotacije zapisan v prostorski bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ je

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\vec{i} + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{j} + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{k}.$$

Posledica Vektor kotne hitrosti Eulerjeve rotacije zapisan v telesni bazni $(\vec{\epsilon}_1', \vec{\epsilon}_2', \vec{\epsilon}_3')$ je

$$\vec{\omega}\,' = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\vec{\epsilon}_1' + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\vec{\epsilon}_2' + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\vec{\epsilon}_3'.$$

Simetrična(Lagrangeeva) vrtavka
Integrali gibanja : komponenta vrtilne količine okoli navpičnice, komponenta vrtilne količine v telesnem koordinatnem sistemu okoli osi simetrije in vsota kinetične in potencialne energije.
Analitični zapis konstant gibanja

$$\begin{aligned} J_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) &= J_1 a, \\ \dot{\varphi}\left(J_1\sin^2\theta + J_3\cos^2\theta\right) + J_3\dot{\psi}\cos\theta &= J_1 b, \\ \frac{1}{2}J_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}J_3(\omega_3)^2 + mgl\cos\theta &= E. \end{aligned}$$

Redukcija gibanja na premočrtno gibanje kota nutacije.

$$\dot{u}^2 = (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2, \quad \alpha = \frac{2E'}{J_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{J_1}.$$

Kvalitativni opis gibanja v odvisnosti od konstant gibanja.

19\. 1. 13 **Literatura**

- Goldstein, H., *Classical Mechanics* , 2nd ed., Addison-Wesley, reading, Mass., 1980, 219-225

Pokončna vrtavka, vrtavka se vrti pokonci $\iff$ $a = b$ in $\alpha = \beta$.
Trditev Gibanje pokonňce vrtavke je stabilno, ce je $a^2/\alpha > 2$.
Hitra vrtavka

$$\frac{a^2}{\beta} = \frac{J_3}{J_1}\frac{\frac{1}{2}J_3\omega_3^2}{mgl} >> 1.$$

Klasična naloga vrtavke; $\dot{\varphi}(t=0) = 0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$, $u_0 = \frac{b}{a}$, $\alpha = \beta u_0$.
Razpon nutacije je $\frac{\beta\sin^2\theta_0}{a^2}$.
Frekvenca nutacije je a.