

## 2. domača naloga iz Mehanike 1

- (1) Dolga palica se enakomerno s kotno hitrostjo  $\omega$  vrti v vodoravni ravnini okoli izhodišča. Po njej se brez trenja giblje točka z maso  $m$  pod vplivom gravitacijske sile, ki je dana s potencialom

$$V(r) = -\frac{mk}{r},$$

kjer je  $k$  pozitivna konstanta in  $r$  razdalja točke od izhodišča.

- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu, ki se vrti skupaj s palico.
- (b) Na palico postavimo materialno točko v položaj  $r = r_0$ , tako da nima hitrosti v radialni smeri. Za katere vrednosti  $r_0$  bo točka šla proti neskončnosti?
- (2) Palica, ki je nagnjena za kot  $\phi$  glede na navpično os, se vrti okoli nje s kotno hitrostjo  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ , kjer sta  $\alpha$  in  $\omega_0$  konstanti. Po palici se pod vplivom sile teže v navpični smeri in brez trenja giblje točka z maso  $m$ .
- (a) Izberi si primeren relativni koordinatni sistem in zapiši zvezo med bazama relativnega in absolutnega sistema.
- (b) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (c) Točko postavimo na palico in opazujemo njeno gibanje. Ali lahko postavimo masno točko na palico, tako da bo mirovala? Kam na palico jo moramo postaviti v tem primeru?

- (3) Polobroč s polmerom  $R$  se enakomerno s kotno hitrostjo  $\omega$  vrti okoli osi, ki gre skozi njegovi krajišči. Po njem se brez trenja giblje točka z maso  $m$ , ki je preko dveh vzmeti vzdolž polobroča pripeta na obe njegovi krajišči. Vzmeti imata koeficient  $k$  in neraztegnjeno dolžino  $l$ .

- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu in reduciraj gibanje na premočrtno gibanje polarnega kota.
- (b) V odvisnosti od kotne hitrosti  $\omega$  poišči ravnovesne lege in ugotovi ali so stabilne.

- (4) Krivulja, ki je v začetnem trenutku podana s sistemom enačb  $z = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y = 0$ , se enakomerno s kotno hitrostjo  $\omega$  vrti okoli osi  $z$ , po njej pa se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso  $m$ .

- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (b) V začetnem trenutku poženemo materialno točko s hitrostjo  $v_0$  iz izhodišča v smeri krivulje. Kako visoko se dvigne točka?
- (5) Parabola v prostoru, dana s sistemom enačb  $z = x^2$ ,  $y = 0$ , se vrti enakomerno s kotno hitrostjo  $\omega$  okoli osi  $z$ . Po njej se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso  $m$ .
- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (b) Za katere vrednosti kotne hitrosti  $\omega$  je v temenu parabole stabilna ravnovesna lega?
- (6) Dani sta rotaciji  $R(t) = R(\vec{e}(t), \phi)$  in  $Q(t)$ , kjer je  $\phi$  konstanten kot,  $\vec{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$  in

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj vektorja kotne hitrosti in rotacijski vektor rotacije  $Q \circ R$ .

- (7) Homogen stožec z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  se enakomerno kotali po podlagi, tako da je vrh stožca vpet v točki, ki je na višini  $R$  nad podlago. Kotna hitrost precesije stožca je  $\omega$ .
- (a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor.
- (b) Izračunaj kinetično energijo stožca.
- (c) Izračunaj vrtilno količino stožca.
- (8) Homogen valj z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  se vrti okrog težišča. Vrtenje valja je dano z matriko  $Q(t) = Q_2(t) \circ Q_1(t)$ , kjer je  $Q_1(t) = R(\vec{k}, \omega t)$ ,  $Q_2(t) = R(\vec{i}, -\Omega t)$  in sta  $\omega, \Omega$  dani konstanti.
- (a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor.
- (b) Izračunaj kinetično energijo valja.
- (c) Izračunaj vrtilno količino valja v prostorski bazi.
- (9) Označimo s  $T$  telo, ki ga dobimo tako, da zarotiramo lik

$$P = \{b \geq z \geq px^2, y = 0\}$$

okoli osi  $z$ . Izračunaj vztrajnostni tenzor telesa  $T$  glede na težišče.

- (10) Dana je homogena krogelna lupina z notranjim polmerom  $r$ , z zunanjim polmerom  $R$  in z maso  $m$ .
- Izračunaj vztrajnostni tenzor lupine glede na težišče.
  - S Steinerjevim izrekom izračunaj vztrajnostni tenzor lupine glede na točko na njenem zunanjem obodu.
  - Lupino vpnemo v točki na njenem zunanjem obodu. Okoli katerih osi je možno enakomerno vrtenje lupine brez zunanjih navorov?
- (11) Homogena kocka z maso  $m$  in s stranico dolžine  $a$  se enakomerno vrti s kotno hitrostjo  $\omega$  okoli ene od svojih stranic.
- Izračunaj vztrajnostni tenzor kocke glede na oglišče.
  - Poišči glavne osi vztrajnostnega tenzorja.
  - Izračunaj kot med vektorjema kotne hitrosti in vrtilne količine.
- (12) Homogena plošča v obliki elipse s polosema  $a$  in  $b$  ter z maso  $m$  se vrti okrog večje polosi. Ploščo zavrtimo, tako da ima na začetku kotno hitrost  $\omega_0$ .
- Izračunaj vztrajnostni tenzor plošče glede na težišče in glede na teme elipse pri večji polosi.
  - Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj, koliko časa je potrebno, da se kotna hitrost zmanjša na polovico prvotne, če vrtenje zaviramo z navorom, ki je sorazmeren kotni hitrosti (to je  $N(\omega) = -k\omega$  za nek  $k > 0$ ).
- (13) Homogen valj z maso  $m$ , polmerom  $R$  in višino  $h$  zavrtimo okoli simetrijske osi s kotno hitrostjo  $\omega_0$ . Valj stisnemo z vodoravnima hrapavima ploščama z nasprotno enakima silama velikosti  $F$ , ki sta enakomerno porazdeljeni po stičnih ploskvah. Zapiši Eulerjeve enačbe in izračunaj, čez koliko časa se valj ustavi, če je koeficient trenja med ploščama in valjem enak  $\mu$ .
- (14) Med dve vzporedni vodoravni steni na razdalji  $l$  je med točki  $A$  in  $B$  v navpični smeri postavljena os, ki se enakomerno vrti s kotno hitrostjo  $\omega$ . Na središču osi je nanjo pod kotom  $\alpha$  pripeta lahka palica dolžine  $2d$ , na vsakem koncu pa kroglica s polmerom  $r$  in z maso  $m$ .
- Izračunaj vztrajnostni tenzor sistema kroglic glede na težišče.
  - Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe.
  - Pri katerem kotu  $\alpha$  bo potreben navor maksimalen?

- (15) Vodoravna plošča se giblje enakomerno pospešeno v vodoravni smeri, po njej pa se kotali krogla z maso  $m$  in s polmerom  $R$ . V začetnem trenutku ima težišče krogle hitrost  $v_0$  relativno na ploščo v smeri pravokotno na gibanje plošče.
- (a) Izračunaj silo kotaljenja.
  - (b) Izračunaj trajektorijo težišča krogle v koordinatnem sistemu, ki miruje glede na ploščo.