Mehanika 1

Dinamika togega telesa

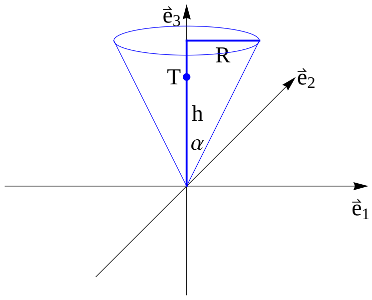
(1) Homogen stožec je omejen s ploskvami $z = 0$, $z = h$ in $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$.

(a) Izračunaj težišče stožca.

(b) Izračunaj vztrajnostni tenzor stožca glede na vrh in glede na težišče stožca.

(c) Izračunaj kinetično energijo stožca, ki se kotali po ravnini, v primeru, ko je $h = R$.

Rešitev: (a) Najprej bomo izračunali težišče stožca.



Koordinate težišča T togega telesa V lahko v splošnem izračunamo s pomočjo formule

$$T = \frac{1}{m} \iiint_V \vec{r} \rho \, dV.$$

Stožec bomo parametrizirali s cilindričnimi koordinatami:

$$\begin{aligned} z &\in [0, h], \\ \phi &\in [0, 2\pi], \\ r &\in \left[0, z\frac{R}{h}\right]. \end{aligned}$$

Zaradi rotacijske simetrije leži težišče stožca na osi simetrije, od koder sledi $T_x = T_y = 0$. Zato moramo izračunati samo z koordinato težišča.

$$\begin{aligned} T_z = \frac{1}{m} \iiint_V z\rho \, dV &= \frac{\rho}{m} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z\frac{R}{h}} zr \, dr, \\ &= \frac{\rho}{m} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} z\frac{z^2 R^2}{2h^2} d\phi, \\ &= \frac{R^2}{2Vh^2} \int_0^h 2\pi z^3 dz, \\ &= \frac{\pi R^2}{Vh^2} \frac{h^4}{4} = \frac{\pi R^2 h}{3V} \frac{3h}{4}, \\ &= \frac{3}{4} h. \end{aligned}$$

Pri izračunu smo upoštevali, da za homogeno telo velja $\rho = \frac{m}{V}$ in da je volumen stožca enak $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$. Težišče stožca je torej v točki

$$T = \left(0, 0, \frac{3}{4}h\right).$$

(b) Vztrajnostni tenzor togega telesa J_0 je analog mase pri vrtenju telesa okoli točke 0. Če ga zapišemo po komponentah, je vztrajnostni tenzor 3×3 simetrična matrika, ki je odvisna od:

· izbire točke 0,

· orientacije koordinatnih osi.

Omogoča nam, da izračunamo kinetično energijo in vrtilno količino togega telesa, ključno vlogo pa igra tudi v Eulerjevih dinamičnih enačbah. Zaradi simetričnosti zmeraj obstajajo tri osi v prostoru, okrog katerih je možna enakomerna rotacija togega telesa. Za vrtenje okoli ostalih osi je načeloma potreben navor.

Pri računanju vztrajnostnega tenzorja ponavadi izberemo koordinatne osi in izhodišče tako, da dobimo diagonalno matriko. Pri premiku izhodišča se vztrajnosni tenzor transformira po Steinerjevem izreku, pri spremembi orientacije koordinatnih osi pa je potrebno matriko vztrajnostnega tenzorja konjugirati s prehodno matriko.

V danih koordinatah s središčem v točki 0 ima vztrajnostni tenzor komponente

$$J_0 = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} = \iiint_V \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \rho \, dV.$$

Računajmo:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \iiint_V (y^2+z^2)\rho \, dV = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z\frac{R}{h}} (r^2 \sin^2\phi + z^2) r \, dr, \\ &= \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\phi \frac{R^4 z^4}{4h^4} + \frac{R^2 z^4}{2h^2}\right) d\phi, \\ &= \rho \int_0^h \left(\pi \frac{R^4 z^4}{4h^4} + 2\pi \frac{R^2 z^4}{2h^2}\right) dz, \\ &= \rho\pi \left(\frac{R^4 h}{20} + \frac{R^2 h^3}{5}\right), \\ &= \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right). \end{aligned}$$

Analogen račun nam da $J_{yy} = J_{xx} = \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)$, za J_{zz} pa velja:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \iiint_V (x^2+y^2)\rho \, dV = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z\frac{R}{h}} r^3 \, dr, \\ &= 2\pi\rho \int_0^h \frac{R^4 z^4}{4h^4} \, dz, \\ &= \frac{3}{10} m R^2. \end{aligned}$$

Če ima naše telo dovolj simetrij, nam deviacijskih momentov J_{xy}, J_{xz} in J_{yz} pogosto ni treba računati. Normala na ravnino zrcalne simetrije homogenega telesa je namreč zmeraj v smeri glavne osi vztrajnostnega tenzorja. V praksi to pomeni:

· Telo je simetrično glede na ravnino $xy \implies J_{xz} = J_{yz} = 0$,
· Telo je simetrično glede na ravnino $xz \implies J_{xy} = J_{zy} = 0$,
· Telo je simetrično glede na ravnino $yz \implies J_{yx} = J_{zx} = 0$.

Naš stožec je simetričen glede na ravnini xz in yz, zato je $J_{xy} = J_{zy} = J_{zx} = 0$. Tako dobimo

$$J_{\text{vrh}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

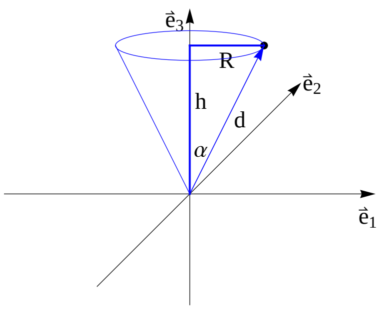
Ko imamo enkrat izračunan vztrajnostni tenzor togega telesa glede na neko točko, ga lahko z uporabo Steinerjevega izreka hitro izračunamo glede na poljubno drugo točko. Med vztrajnostnima tenzorjema J_0 in J_* velja zveza

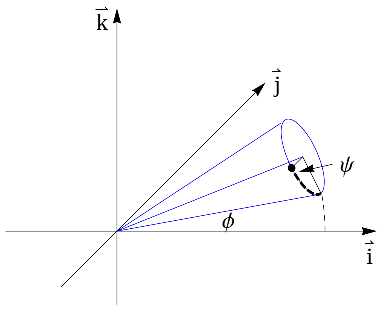
$$J_0 = J_* + mr^2\mathrm{Id} - m\vec{r} \otimes \vec{r},$$

kjer je $\vec{r}$ vektor od težišča do točke 0 in $r = |\vec{r}|$. Pri nas je $\vec{r} = \left(0, 0, -\frac{3}{4}h\right)$, $r^2 = \frac{9}{16}h^2$ in

$$J_* = J_{\text{vrh}} - mr^2\mathrm{Id} + m\vec{r} \otimes \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

(c) Stožec ima višino h in polmer R. Če z α označimo kot med nosilko stožca in njegovo simetralo, je $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{h}{R}$. Kot ψ je določen z vrtenjem stožca okoli lastne osi, kot ϕ pa z vrtenjem okoli navpične osi. Pogoj kotaljenja nam da zvezo $\psi = -\frac{1}{\sin\alpha}\phi$.





Kinetično energijo togega telesa lahko izračunamo na dva načina. Če se telo vrti okoli točke 0, je njegova kinetična energija enaka

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\left\langle \omega, J_0 \cdot \omega \right\rangle.$$

Za splošno gibanje togega telesa pa velja

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\left\langle \omega, J_* \cdot \omega \right\rangle.$$

V našem primeru lahko uporabimo obe formuli, saj je pri kotaljenju vrh stožca pri miru.

1. Vrtenje stožca okrog vrha:

V prejšnjih nalogah smo že izračunali, da je rotacijski vektor kotaljenja enak

$$\vec{\omega}(t) = -\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\left(\cos\psi\sin\alpha\vec{e}_1 + \sin\psi\sin\alpha\vec{e}_2 + \cos\alpha\vec{e}_3\right),$$

vztrajnostni tenzor glede na vrh stožca pa

$$J_{\mathrm{vrh}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalne člene vztrajnostnega tenzorja označimo z $J_1 = J_2 = \frac{3}{5}m(\frac{R^2}{4}+h^2)$, $J_3 = \frac{3}{10}mR^2$, komponente rotacijskega vektorja pa z:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\psi\sin\alpha, \\ \omega_2 &= -\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\psi\sin\alpha, \\ \omega_3 &= -\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Potem je:

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}\langle\omega, J_{\mathrm{vrh}}\cdot\omega\rangle = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right), \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\left(J_1\sin^2\alpha + J_3\cos^2\alpha\right), \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\left(\frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)\sin^2\alpha + \frac{3}{10}mR^2\cos^2\alpha\right), \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\cdot\frac{3}{10}m\left(\left(\frac{R^2}{2} + 2h^2\right)\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha\right), \\ &= \frac{3}{20}m\dot{\phi}^2\left(\frac{h^2}{2}\sin^2\alpha + 2h^2\cos^2\alpha + h^2\cos^2\alpha\right), \\ &= \frac{3}{40}mh^2\dot{\phi}^2\left(\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha\right). \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $h = R$ in $\alpha = 45°$, dobimo

$$T = \frac{21}{80}mR^2\dot{\phi}^2.$$

2. Gibanje težišča plus vrtenje stožca okrog težišča:

Rotacijski vektor kotaljenja je spet

$$\vec{\omega}(t) = -\dot{\phi}\,\mathrm{ctg}\,\alpha\left(\cos\psi\sin\alpha\vec{e}_1 + \sin\psi\sin\alpha\vec{e}_2 + \cos\alpha\vec{e}_3\right),$$

vztrajnostni tenzor glede na težišče stožca pa je

$$J_* = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}m(R^2 + \frac{h^2}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}.$$

Diagonalne člene vztrajnostnega tenzorja spet označimo z $J_1 = J_2$ in J_3, komponente rotacijskega vektorja pa z ω_1, ω_2 in ω_3. Hitrost težišča je $|\vec{v}_*| = \frac{3}{4}h\cos\alpha|\dot{\phi}|$. Sledi

$$\begin{aligned}
W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}m|v_*|^2 + \frac{1}{2}\langle\omega, J_*\cdot\omega\rangle = \frac{1}{2}m|v_*|^2 + \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right),\\
&= \frac{1}{2}m\cdot\frac{9}{16}h^2\cos^2\alpha\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\operatorname{ctg}^2\alpha\left(J_1\sin^2\alpha + J_3\cos^2\alpha\right),\\
&= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\left(\frac{9}{16}mh^2\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\left(\frac{3}{20}m\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)\sin^2\alpha + \frac{3}{10}mR^2\cos^2\alpha\right)\right),\\
&= \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2\left(\frac{9}{16}h^2\cos^2\alpha + \frac{3}{20}h^2\sin^2\alpha + \frac{3}{80}h^2\cos^2\alpha + \frac{3}{10}h^2\cos^2\alpha\right),\\
&= \frac{1}{2}mh^2\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{20}\sin^2\alpha + \frac{9}{10}\cos^2\alpha\right),\\
&= \frac{3}{40}mh^2\dot{\phi}^2\left(\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha\right),\\
&= \frac{21}{80}mR^2\dot{\phi}^2.
\end{aligned}$$

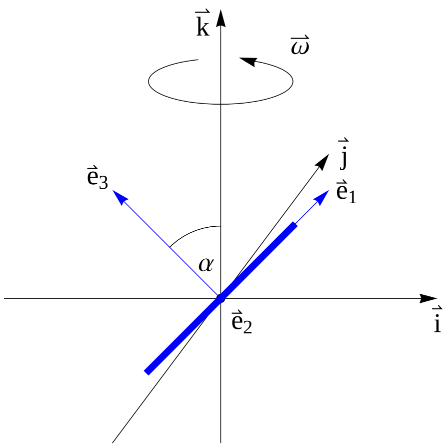
□

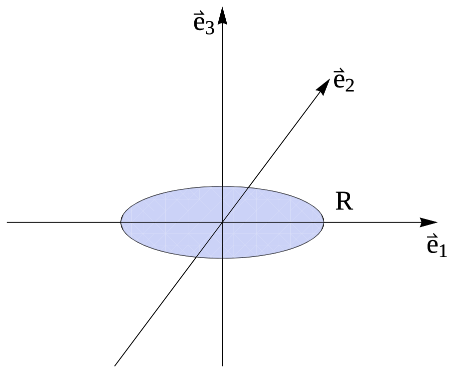
(2) Homogen disk z maso m in polmerom R se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi, ki gre skozi središče diska. Kot med osjo vrtenja in normalo na disk je enak α.

(a) Izračunaj vektor vrtilne količine v telesni in v prostorski bazi.

(b) Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj navor, ki je potreben za vrtenje diska.

Rešitev: (a) Pri študiju dinamike togega telesa imamo na voljo dva koordinatna sistema. Gibanje telesa ponavadi opazujemo iz prostorskega koordinatnega sistema, v katerem veljata Newtonov zakon in zakon o vrtilni količini. Stvari pa se včasih poenostavijo v telesnem koordinatnem sistemu, ki se vrti skupaj s telesom.





Za izračun vrtilne količine diska moramo najprej izračunati njegov vztrajnostni tenzor. Telesni koordinatni sistem si bomo izbrali tako, da bo disk ležal v ravnini vektorjev $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$. V splošnem je vztrajnostni tenzor plošče S, ki leži v xy-ravnini, definiran s predpisom

$$J_0 = \iint_S \begin{bmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix} \rho\, dS.$$

Za homogen disk s polmerom R tako dobimo

$$J_{xx} = \iint_S y^2 \rho \, dS = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 \sin^2\phi \, r \, dr = \rho \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} \sin^2\phi \, d\phi = \rho \frac{\pi R^4}{4} = \frac{1}{4} m R^2.$$

Analogno dobimo še $J_{yy} = J_{xx} = \frac{1}{4} m R^2$ ter $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy} = \frac{1}{2} m R^2$. Zaradi simetrije sta izvendiagonalna člena enaka nič. V telesni bazi ima vztrajnostni tenzor diska torej obliko

$$J_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} m R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m R^2 \end{bmatrix}.$$

V telesni bazi se hitrost vrtenja izraža z rotacijskim vektorjem

$$\vec{\omega}(t) = \omega(\sin\alpha \vec{e}_1 + \cos\alpha \vec{e}_3),$$

zato je vrtilna količina diska enaka

$$\vec{\Gamma}(t) = J_* \cdot \vec{\omega}(t) = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 2J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega \sin\alpha \\ 0 \\ \omega\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J\omega\sin\alpha \\ 0 \\ 2J\omega\cos\alpha \end{bmatrix},$$

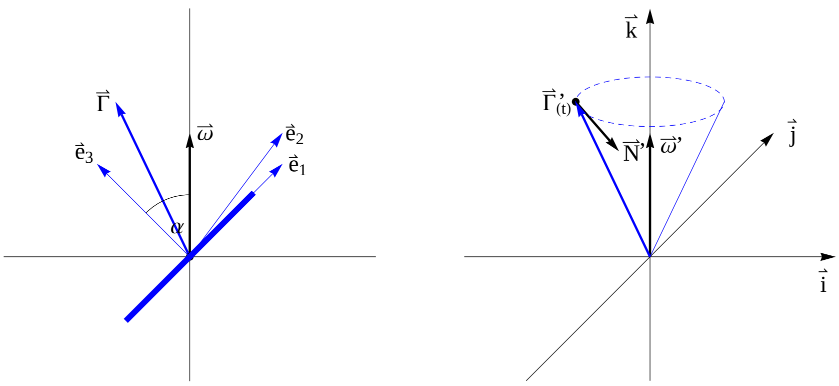
kjer je $J = J_{xx} = \frac{1}{4} m R^2$. Vektor vrtilne količine v prostorski bazi lahko izračunamo s formulo $\vec{\Gamma}'(t) = Q(t) \cdot \vec{\Gamma}(t)$. V našem primeru je $Q(t) = R(\vec{k}, \omega t) R(\vec{j}, -\alpha)$, kar nam da

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

in

$$\vec{\Gamma}'(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J\omega\sin\alpha \\ 0 \\ 2J\omega\cos\alpha \end{bmatrix} = J\omega \begin{bmatrix} -\sin\alpha\cos\alpha\cos\omega t \\ -\sin\alpha\cos\alpha\sin\omega t \\ 1 + \cos^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je vektor vrtilne količine konstanten v telesni bazi, medtem ko v prostorski bazi precesira okoli navpične osi. V nadaljevanju bomo izračunali navor, ki je za to potreben.



(b) Dinamiko vrtenja togega telesa okrog dane fiksne točke 0 določa zakon o vrtilni količini

$$\frac{d\vec{\Gamma}'_0}{dt} = \vec{N}'_0.$$

V telesni bazi se ta zakon zapiše v obliki

$$J_0 \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times J_0 \cdot \vec{\omega} = \vec{N},$$

če pa je J_0 diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi J_1, J_2 in J_3, pa pridemo do Eulerjevih dinamičnih enačb:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(J_2 - J_3) &= N_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(J_3 - J_1) &= N_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(J_1 - J_2) &= N_3. \end{aligned}$$

V našem primeru je $\vec{\omega} = (\omega \sin\alpha, 0, \omega\cos\alpha)$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$, $J_1 = J_2 = \frac{1}{4}mR^2$ ter $J_3 = \frac{1}{2}mR^2$. Od tod dobimo $N_1 = N_3 = 0$ in $N_2 = -\frac{1}{4}mR^2\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha$ in:

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) &= (0, N_2, 0)\,, \\ \vec{N}'(t) &= Q(t) \cdot \vec{N}(t) = N_2(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0). \end{aligned}$$

Navor je ves čas pravokoten na vrtilno količino.

Opomba: Eulerjeve enačbe nam povedo, kako se med vrtenjem spreminja rotacijski vektor $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Če hočemo vedeti, kakšna je orientacija telesa $Q(t)$, pa moramo rešiti še sistem

$$\dot{Q}(t) = Q(t)W(t),$$

kjer je

$$W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrična matrika, ki pripada rotacijskemu vektorju $\vec{\omega}(t)$.

Analitično je to enačbo v splošnem težko reševati, za vajo pa lahko preverimo, da naša rotacija Q reši to enačbo. Iz formul

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\omega t & -\sin\omega t & -\sin\alpha\cos\omega t \\ \cos\alpha\sin\omega t & \cos\omega t & -\sin\alpha\sin\omega t \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix},\ W(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega\cos\alpha & 0 \\ \omega\cos\alpha & 0 & -\omega\sin\alpha \\ 0 & \omega\sin\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

dobimo

$$Q(t)W(t) = \begin{bmatrix} -\omega\cos\alpha\sin\omega t & -\omega\cos\omega t & \omega\sin\alpha\sin\omega t \\ \omega\cos\alpha\cos\omega t & -\omega\sin\omega t & -\omega\sin\alpha\cos\omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po drugi strani pa je

$$\dot{Q}(t) = \begin{bmatrix} -\omega\cos\alpha\sin\omega t & -\omega\cos\omega t & \omega\sin\alpha\sin\omega t \\ \omega\cos\alpha\cos\omega t & -\omega\sin\omega t & -\omega\sin\alpha\cos\omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

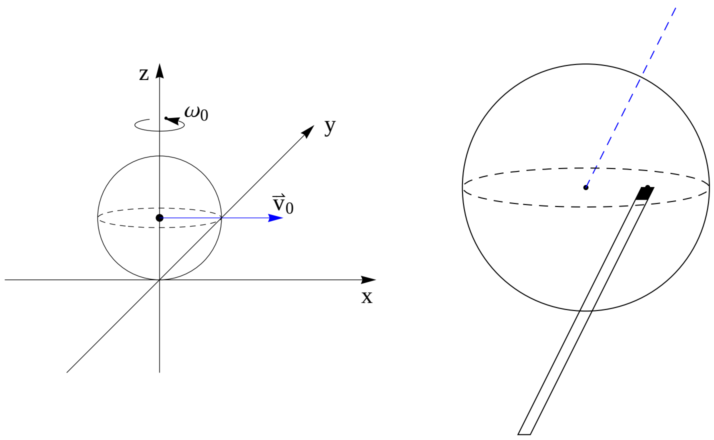
kar smo želeli pokazati. $\square$

(3) Na hrapavi vodoravni podlagi miruje homogena krogla z maso m in polmerom R. Kroglo udarimo, tako da ima na začetku hitrost v_0 v vodoravni smeri in kotno hitrost ω_0 v navpični smeri. Krogla nekaj časa drsi po podlagi, nato pa se začne kotaliti.

(a) Pokaži, da se med drsenjem težišče krogle premika po premici.

(b) Izračunaj, kakšno hitrost in kakšno kotno hitrost ima krogla, tik preden se začne kotaliti.

Rešitev: Kroglo udarimo tako, da ima na začetku poleg translacijske hitrosti težišča še kotno hitrost okoli navpične osi. Pri teh začetnih pogojih bo krogla nekaj časa drsela po podlagi, nato pa se bo začela kotaliti.



Dinamiko krogle bomo razstavili na gibanje težišča in pa na vrtenje krogle okrog težišča. Tokrat bo gibanje krogle lažje opisati v prostorski bazi. Gibanje določata Newtonov zakon in pa zakon o vrtilni količini:

$$m\ddot{\vec{r}}'_* = \vec{F}',$$
$$J_* \cdot \dot{\vec{\omega}}' = \vec{N}'.$$

Med drsenjem delujejo na kroglo sila podlage, sila teže in sila trenja:

$$\vec{F}'_g = -mg\vec{k},$$
$$\vec{F}'_n = mg\vec{k},$$
$$\vec{F}'_{tr} = -\mu mg\frac{\vec{v}'_{dot}}{|\vec{v}'_{dot}|},$$

kjer je μ koeficient trenja med kroglo in podlago in $\vec{v}'_{dot} = \dot{\vec{r}}'_* + \vec{\omega}' \times (-R\vec{k})$ hitrost dotikališča krogle in podlage. K navoru glede na težišče krogle prispeva le sila trenja, in sicer je navor sile trenja enak $\vec{N}' = (-R\vec{k}) \times \vec{F}'_{tr}$. Vztrajnostni tenzor krogle je večkratnik identitete $J_* = J\mathrm{Id}$, kjer je $J = \frac{2}{5}mR^2$, kar nam da:

$$m\ddot{\vec{r}}'_* = \vec{F}'_{tr},$$
$$J\dot{\vec{\omega}}' = (-R\vec{k}) \times \vec{F}'_{tr}.$$

Naš cilj je, da izračunamo, kako se giblje težišče krogle $\vec{r}'_*(t) = (x'(t), y'(t), R)$ in kako se spreminja kotna hitrost krogle $\vec{\omega}'(t)$. Začetni pogoji so:

$$\begin{aligned}
\vec{r}'_*(0) &= (0, 0, R), \\
\dot{\vec{r}}'_*(0) &= (v_0, 0, 0), \\
\vec{\omega}'(0) &= (0, 0, \omega_0).
\end{aligned}$$

(a) Najprej bomo pokazali, da se pri danih začetnih pogojih težišče krogle premika po premici. Edina sila, ki vpliva na trajektorijo težišča, je sila trenja. Pokazali bomo, da med drsenjem sila trenja ves čas kaže v isto smer. Iz enakosti:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{F}}'_{tr} &= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}'_{dot}|}\right)^{\cdot} \vec{v}'_{dot} - \frac{\mu mg}{|\vec{v}'_{dot}|}(\ddot{\vec{r}}'_* + \dot{\vec{\omega}}' \times (-R\vec{k})), \\
&= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}'_{dot}|}\right)^{\cdot} \vec{v}'_{dot} - \frac{\mu mg}{|\vec{v}'_{dot}|}\left(\frac{1}{m}\vec{F}'_{tr} + \frac{R^2}{J}(\vec{k} \times \vec{F}'_{tr}) \times \vec{k}\right), \\
&= -\mu mg \left(\frac{1}{|\vec{v}'_{dot}|}\right)^{\cdot} \vec{v}'_{dot} - \frac{\mu mg}{|\vec{v}'_{dot}|}\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{J}\right)\vec{F}'_{tr}
\end{aligned}$$

sledi, da je $\dot{\vec{F}}'_{tr} \parallel \vec{F}'_{tr}$. Od tod sklepamo, da je $\vec{F}'_{tr}(t) \parallel \vec{F}'_{tr}(0)$, ker pa je velikost sile trenja konstantna, pa od tod sledi

$$\vec{F}'_{tr}(t) = \vec{F}'_{tr}(0) = -\mu mg\vec{i}.$$

Med drsenjem se torej težišče krogle premika vzdolž x-osi.

(b) Med drsenjem krogle po podlagi veljata enačbi:

$$\begin{aligned}
m\ddot{\vec{r}}'_* &= -\mu mg\vec{i}, \\
J\dot{\vec{\omega}}' &= (-R\vec{k}) \times (-\mu mg\vec{i}) = \mu mgR\vec{j}.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo iz prve enačbe:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}}'_*(t) &= (-\mu g, 0, 0), \\
\dot{\vec{r}}'_*(t) &= (v_0 - \mu gt, 0, 0), \\
\vec{r}'_*(t) &= \left(v_0 t - \frac{1}{2}\mu gt^2, 0, R\right),
\end{aligned}$$

iz druge pa:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}}'(t) &= \left(0, \frac{5\mu g}{2R}, 0\right), \\
\vec{\omega}'(t) &= \left(0, \frac{5\mu gt}{2R}, \omega_0\right).
\end{aligned}$$

Krogla se bo začela kotaliti, ko bo $\vec{v}'_{dot} = \dot{\vec{r}}'_* + \vec{\omega}' \times (-R\vec{k}) = 0$. Tako dobimo enačbo:

$$\begin{aligned}
(v_0 - \mu gt, 0, 0) + \left(0, \frac{5\mu gt}{2R}, \omega_0\right) \times (0, 0, -R) &= 0, \\
(v_0 - \mu gt, 0, 0) + \left(-\frac{5\mu gt}{2}, 0, 0\right) &= 0,
\end{aligned}$$

ki ima rešitev $t_0 = \frac{2v_0}{7\mu g}$. Ob tem času bosta hitrost in kotna hitrost krogle:

$$\dot{\vec{r}}'_*(t_0) = \left(\frac{5}{7}v_0, 0, 0\right),$$
$$\vec{\omega}'(t_0) = \left(0, \frac{5v_0}{7R}, \omega_0\right).$$

Za čase $t > t_0$ se bo krogla kotalila s konstantno hitrostjo težišča in s konstantno kotno hitrostjo. $\square$