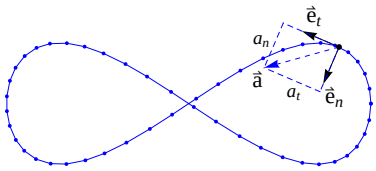
Mehanika 1

Gibanje po krivulji

V tem poglavju bomo podrobneje spoznali kinematiko in dinamiko gibanja materialne točke po ravninski ali pa po prostorski krivulji.



Pospešek točke, ki se giblje po krivulji, lahko zapišemo v obliki

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n,$$

kjer je:

· a_n ... normalni pospešek točke (povzroča spremembo smeri hitrosti),
· a_t ... tangencialni pospešek točke (povzroča spremembo velikosti hitrosti).

Za določanje gibanja materialne točke po krivulji je najbolj primerna naravna parametrizacija krivulje. Če krivuljo parametriziramo z naravnim parametrom s, je gibanje točke določeno s funkcijo $s = s(t)$. V tem primeru sta normalni oziroma tangencialni pospešek točke enaka

$$a_n = \kappa\dot{s}^2,$$
$$a_t = \ddot{s}.$$

Vidimo, da je normalni pospešek točke poleg hitrosti odvisen še od ukrivljenosti krivulje v dani točki, medtem ko je tangencialni pospešek kar enak spremembi velikosti hitrosti.

Zanimivo je morda še dejstvo, da pospešek točke nima komponente v smeri binormale na krivuljo, četudi je krivulja prostorska.

(1) Izračunaj tangencialni in normalni pospešek pri:

(a) enakomernem kroženju: $\vec{r}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$,

(b) enakomerno pospešenem kroženju: $\vec{r}(t) = R\left(\cos\frac{1}{2}\alpha t^2, \sin\frac{1}{2}\alpha t^2\right)$,

(c) gibanju po paraboli: $\vec{r}(t) = \left(v_x t, -\frac{1}{2}gt^2\right)$.

Rešitev: (a) Uporabili bomo formulo za pospešek

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n.$$

Hitrost točke dobimo z odvajanjem položaja po času

$$\dot{\vec{r}}(t) = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t).$$

Od tod sledi, da je velikost hitrosti

$$|\dot{s}| = |\dot{\vec{r}}| = R\omega$$

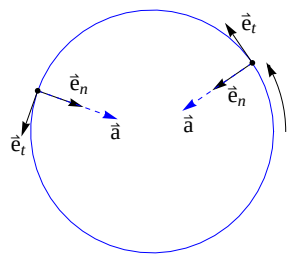
konstantna in $\ddot{s} = 0$. Vektor $\vec{e}_t$ je enotski vektor v smeri tangente na krivuljo (v smeri gibanja), medtem ko je vektor $\vec{e}_n$ enotski vektor v smeri normale na krivuljo. Računanje vektorja $\vec{e}_n$ je lahko pri prostorskih krivuljah dokaj zamudno, pri ravninskih krivuljah pa lahko s pridom uporabimo dejstvo, da sta tangentna in normalna smer pravokotni. Predznak vektorja $\vec{e}_n$ določimo tako, da kaže na tisti breg tangentne smeri, proti kateremu zavija tangentni vektor. V našem primeru tako dobimo:

$$\begin{aligned}\vec{e}_t &= (-\sin\omega t, \cos\omega t),\\ \vec{e}_n &= (-\cos\omega t, -\sin\omega t).\end{aligned}$$

Ukrivljenost krožnice s polmerom R je konstantno enaka $\frac{1}{R}$. Če povzamemo vse podatke, dobimo, da je pospešek točke pri enakomernem kroženju enak

$$\vec{a} = \omega^2 R\vec{e}_n.$$

Tangencialnega pospeška ni, normalni pospešek pa je konstanten in enak $a_n = \omega^2 R$.



(b) V tem primeru je hitrost točke enaka

$$\dot{\vec{r}}(t) = \alpha R t\left(-\sin\frac{1}{2}\alpha t^2, \cos\frac{1}{2}\alpha t^2\right).$$

Od tod dobimo za čase $t > 0$ enakosti:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= \alpha R t,\\ \ddot{s} &= \alpha R.\end{aligned}$$

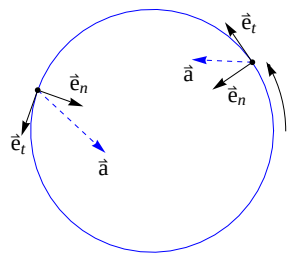
Smeri tangente in normale sta isti kot v prejšnjem primeru:

$$\begin{aligned}\vec{e}_t &= \left(-\sin\frac{1}{2}\alpha t^2, \cos\frac{1}{2}\alpha t^2\right),\\ \vec{e}_n &= \left(-\cos\frac{1}{2}\alpha t^2, -\sin\frac{1}{2}\alpha t^2\right),\end{aligned}$$

ukrivljenost krožnice pa je enaka $\frac{1}{R}$. Pospešek točke pri enakomerno pospešenem kroženju je tako enak

$$\vec{a} = \alpha R\vec{e}_t + \alpha^2 t^2 R\vec{e}_n.$$

Parameter α igra vlogo kotnega pospeška, tangencialnemu pospešku pa bi lahko rekli tudi obodni pospešek. Ta je ves čas konstanten, medtem ko normalni pospešek kvadratno raste. Pospešeno kroženje je mogoče, dokler potrebna normalna sila na točko ne preseže maksimalne sile, s katero obroč lahko deluje na točko.



(c) Poglejmo si še analizo pospeška pri poševnem metu. Hitrost in pospešek sta enaka:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (v_x, -gt),$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = (0, -g).$$

Od tod sledi:

$$\dot{s} = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2},$$
$$\ddot{s} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}}.$$

Tangentni in normalni vektor na parabolo sta enaka:

$$\vec{e}_t = \frac{(v_x, -gt)}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}},$$
$$\vec{e}_n = \frac{(-gt, -v_x)}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}},$$

njena ukrivljenost pa je

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{g v_x}{(\sqrt{v_x^2 + (gt)^2})^3}.$$

Razcep pospeška na tangencialno in normalno komponento je v tem primeru

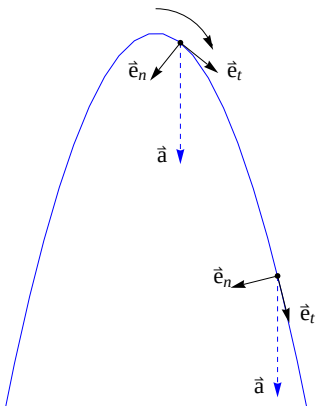
$$\vec{a} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}} \vec{e}_t + \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}} \vec{e}_n.$$

Ko čas narašča čez vse meje, imamo:

$$\lim_{t \to \infty} a_t = \lim_{t \to \infty} \frac{g^2 t}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}} = g,$$
$$\lim_{t \to \infty} a_n = \lim_{t \to \infty} \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}} = 0,$$

kar je razumljivo, saj kaže tangentna smer čedalje bolj v smeri težnega pospeška.

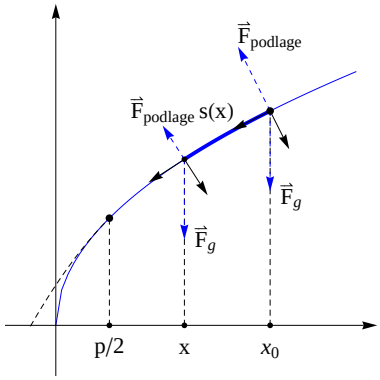
Poglejmo si še skico.



□

(2) Po paraboli $y^2 = 2px$ se brez trenja pod vplivom sile teže giblje točka z maso m. Kje na paraboli jo moramo spustiti, da bo zapustila parabolo v točki $\left(\frac{p}{2}, p\right)$?

Rešitev: Med gibanjem po paraboli delujeta na točko sila teže in sila podlage. Ker smo privzeli, da med točko in podlago ni trenja, kaže sila podlage v smeri normale na krivuljo. Dodatno bomo še privzeli, da lahko sila podlage točko samo potiska proč od podlage, ne more pa je vleči k sebi.



Ko točko postavimo na parabolo in jo spustimo, jo začne dinamična komponenta sile teže pospeševati vzdolž krivulje. Da pa točka ostane na paraboli, mora vsota vseh sil v normalni smeri ustrezati normalnemu pospešku, ki je potreben za gibanje po paraboli. Sili, ki delujeta v normalni smeri sta sila podlage in pa statična komponenta sile teže. V začetnem trenutku točka nima normalnega pospeška, zato je takrat sila podlage nasprotno enaka statični komponenti sile teže. Med spuščanjem po paraboli se hitrost točke veča, zato se veča tudi normalni pospešek točke, kar pa pomeni, da je sila podlage na točko čedalje manjša, v nekem trenutku pa postane nič. Če bi bila točka priklenjena na parabolo, bi lahko nadaljevala pot po njej, sila podlage pa bi jo vlekla k sebi. V našem primeru pa točka v trenutku, ko je sila podlage nanjo enaka nič, zapusti parabolo in nadaljuje pot kot pri poševnem metu.

Gibanje točke po paraboli bomo določili s pomočjo 2. Newtonovega zakona:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$
$$\vec{F}_g + \vec{F}_{podlage} = m(\ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n).$$

Preden bomo določili enačbe gibanja, pa nas čaka še kar nekaj dela z računanjem vseh količin, ki nastopajo v Newtonovemu zakonu.

Parabolo bomo parametrizirali s parametrom x. Od tod potem dobimo:

$$\vec{r}(x) = (x, \sqrt{2px}),$$
$$\vec{r}'(x) = \left(1, \sqrt{\frac{p}{2x}}\right),$$
$$\vec{r}''(x) = \left(0, -\sqrt{\frac{p}{8x^3}}\right).$$

Tangentni in normalni vektor na parabolo sta enaka:

$$\vec{e}_t = \frac{\left(-1, -\sqrt{\frac{p}{2x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}},$$
$$\vec{e}_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{p}{2x}}, -1\right)}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}},$$

ukrivljenost parabole pa

$$\kappa = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{\sqrt{\frac{p}{8x^3}}}{\left(\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\right)^3}.$$

Načeloma bi lahko v vseh izrazih parameter x zamenjali s parametrom s, a bi stvari na ta način postale precej bolj grde in nepregledne. Zavedati pa se moramo, da je naš cilj priti do enačb, ki nam bodo povedale, kako se x spreminja v odvisnosti od časa, ko se točka spušča po paraboli.

Na točko med gibanjem po paraboli delujeta sila teže in pa sila podlage:

$$\vec{F}_g = (0, -mg),$$
$$\vec{F}_{podlage} = N\vec{e}_n.$$

Predpostavili smo, da lahko podlaga točko samo potiska proč od sebe, kar pomeni, da je gibanje po paraboli mogoče, dokler je $N \leq 0$. Da bi lahko Newtonov zakon zapisali v bazi $(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$, moramo še najprej razviti silo teže po tej bazi

$$\vec{F}_g = (\vec{F}_g \cdot \vec{e}_t)\vec{e}_t + (\vec{F}_g \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n = mg\frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}\vec{e}_t + mg\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}\vec{e}_n.$$

Sedaj lahko zapišemo Newtonov zakon po komponentah

$$\vec{e}_t: \quad mg\frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}} = m\ddot{s},$$
$$\vec{e}_n: \quad mg\frac{1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}} + N = m\kappa\dot{s}^2.$$

Iz prve enačbe lahko izračunamo, kako se točka spušča po paraboli, medtem ko nam druga enačba pove, s kakšno silo deluje sila podlage na točko. Ta sila je v splošnem odvisna od hitrosti točke in pa od njenega položaja v danem trenutku. V našem primeru pa se bodo stvari poenostavile, saj smo predpostavili, da med točko in parabolo ni trenja. Zato se med gibanjem ohranja skupna energija točke, kar pa pomeni, da je njena hitrost odvisna samo od trenutnega položaja.

Zakon o ohranitvi energije točke lahko zapišemo v obliki

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 + mg\sqrt{2px} = mg\sqrt{2px_0}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} v(x)^2 &= 2g\left(\sqrt{2px_0} - \sqrt{2px}\right), \\ N(x) &= m\kappa(x)v(x)^2 - \frac{mg}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}}. \end{aligned}$$

Druga enakost nam omogoča, da izračunamo silo podlage na točko v poljubni točki na paraboli. Ta sila je odvisna od začetnega položaja x_0, naša želja pa je, da najdemo tak x_0, pri katerem bo $N\left(\frac{p}{2}\right) = 0$. To pomeni, da moramo rešiti enačbo

$$\begin{aligned} m\kappa\left(\frac{p}{2}\right)v\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{mg}{\sqrt{2}} &= 0, \\ \frac{2g(\sqrt{2px_0} - p)}{p\sqrt{8}} &= \frac{g}{\sqrt{2}}, \\ \frac{(\sqrt{2px_0} - p)}{p} &= 1, \\ \sqrt{2px_0} &= 2p, \\ x_0 &= 2p. \end{aligned}$$

Če torej materialno točko spustimo v točki s koordinatama $(2p, 2p)$, bo zapustila gibanje po paraboli v točki $\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

V trenutku zapustitve ima točka hitrost

$$\vec{v} = \left(-\sqrt{gp}, -\sqrt{gp}\right),$$

od tod pa z integracijo enačb poševnega meta lahko izpeljemo, da točka nadaljuje pot po paraboli

$$y = -\frac{1}{2p}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right) + p.$$

Opomba: Zaradi ohranitve energije je bila v našem primeru hitrost točke odvisna samo od položaja na paraboli, zato smo lahko dokaj enostavno določili silo podlage na točko. Če pa bi gibanje točke zavirala sila trenja, bi morali za določitev sile podlage najprej rešiti še ustrezen analog enačbe

$$mg\frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}} = m\ddot{s}.$$

V tej obliki enačba še ni čisto primerna za reševanje, saj moramo najprej upoštevati zvezo med parametroma s in x. Glede na naše oznake velja

$$s(x) = \int_x^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx.$$

Od tod dobimo

$$\begin{aligned} s'(x) &= -\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}, \\ s''(x) &= \frac{p}{4x^2\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}}. \end{aligned}$$

S posrednim odvajanjem dobimo še zvezo

$$\ddot{s} = (s'(x)\dot{x})^{\cdot} = s''(x)\dot{x}^2 + s'(x)\ddot{x}.$$

Če to vstavimo v enačbo gibanja, pridemo do diferencialne enačbe drugega reda

$$mg\frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}}{\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}} = m\left(\frac{p}{4x^2\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}}\dot{x}^2 - \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\ddot{x}\right),$$

ki jo lahko še poenostavimo v

$$\ddot{x} = \frac{p}{4x^2\left(1 + \frac{p}{2x}\right)}\dot{x}^2 - g\frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}}{1 + \frac{p}{2x}}.$$

Začetna pogoja sta $x(0) = 2p$ in $\dot{x}(0) = 0$. To enačbo je najprimerneje rešiti z numeričnimi metodami. Če bi želeli poleg sile teže modelirati še kakšno drugo silo, bi morali najprej izračunati njeno projekcijo na smer gibanja točke in ustrezen člen nato dodati na levo stran enačbe gibanja.

V primeru, ko se ohranja energija točke, lahko enačbo gibanja integriramo do zakona o ohranitvi energije

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V(s) = E.$$

Z uporabo zveze med s in x dobimo

$$\begin{aligned} \dot{s}^2 = (s'(x)\dot{x})^2 &= \left(1 + \frac{p}{2x}\right)\dot{x}^2, \\ V(s) &= mg\sqrt{2px}, \\ E &= 2mgp. \end{aligned}$$

Tako pridemo do diferencialne enačbe prvega reda

$$\frac{1}{2}m\left(1 + \frac{p}{2x}\right)\dot{x}^2 + mg\sqrt{2px} = 2mgp,$$

ki se poenostavi v

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{2g(2p - \sqrt{2px})}{1 + \frac{p}{2x}}}.$$

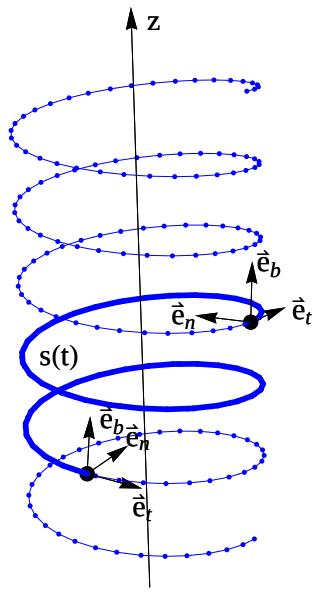
Začetni pogoj je tokrat $x(0) = 2p$. Ena rešitev te enačbe je $x(t) = 2p$, za nas pa je zanimiva nekonstantna rešitev. $\square$

(3) Po vijačnici s parametrizacijo

$$\vec{r}(\phi) = R(\cos\phi, \sin\phi, -k\phi)$$

se brez trenja giblje materialna točka z maso m. Nanjo deluje homogena sila teže v smeri osi vijačnice. Zapiši Newtonove enačbe gibanja in jih reši.

Rešitev: Privzeli bomo, da je v začetnem trenutku $\vec{r}(0) = (R, 0, 0)$ in $\dot{\vec{r}}(0) = (0, 0, 0)$, naš cilj pa bo, da določimo, kako se točka giblje po vijačnici pod vplivom sile teže in da ugotovimo, s kakšno silo deluje vijačnica nanjo.



Do enačb gibanja bomo prišli s pomočjo 2. Newtonovega zakona:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$
$$\vec{F}_g + \vec{F}_{vezi} = m(\ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n).$$

Pri tem je $\vec{F}_g$ sila teže, $\vec{F}_{vezi}$ pa sila vijačnice na materialno točko. Predpostavili bomo, da je točka priklenjena na vijačnico in je ne more zapustiti.

Položaj točke bomo zapisali v obliki

$$\vec{r}(t) = R(\cos\phi(t), \sin\phi(t), -k\phi(t)).$$

Če znamo izračunati funkcijo $\phi = \phi(t)$, bomo znali tudi opisati, kako se točka giblje po vijačnici. Hitrost materialne točke je enaka

$$\dot{\vec{r}}(t) = R\dot{\phi}(-\sin\phi, \cos\phi, -k),$$

od koder sledi:

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-\sin\phi, \cos\phi, -k),$$
$$\dot{s} = R\dot{\phi}\sqrt{1+k^2}.$$

Normalni vektor prostorske krivulje je implicitno definiran s formulo

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \kappa \vec{e}_n.$$

V praksi je praviloma težko odvajati po naravnem parametru, zato raje odvajamo posredno, da pridemo do zveze

$$\dot{\vec{e}}_t = \kappa \dot{s} \vec{e}_n.$$

Po eni strani lahko od tod sklepamo, da je normalni vektor pravzaprav enotski vektor v smeri odvoda enotskega tangentnega vektorja, po drugi strani pa dobimo tudi alternativno formulo za ukrivljenost

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{e}}_t|}{|\dot{s}|}.$$

V našem primeru je odvod enotskega tangentnega vektorja enak

$$\dot{\vec{e}}_t = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{1+k^2}}(-\cos\phi, -\sin\phi, 0),$$

od tod pa dobimo

$$\begin{aligned} \vec{e}_n &= (-\cos\phi, -\sin\phi, 0), \\ \kappa &= \frac{1}{R(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Vidimo, da ima vijačnica konstantno ukrivljenost.

Pri prostorskih krivuljah imamo tudi smer binormale, ki je pravokotna na tangentno in normalno smer

$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-k\sin\phi, k\cos\phi, 1).$$

Preden zapišemo enačbe gibanja, moramo razviti še silo teže in pa silo vezi glede na bazo $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$. Predpostavili smo, da se točka po vijačnici giblje brez trenja, zato je

$$\vec{F}_{vezi} = F_n \vec{e}_n + F_b \vec{e}_b.$$

Komponenti F_n in F_b nam bosta povedali, s kakšno silo deluje vijačnica na točko med gibanjem. Za silo teže pa imamo

$$\vec{F}_g = (\vec{F}_g \cdot \vec{e}_t)\vec{e}_t + (\vec{F}_g \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n + (\vec{F}_g \cdot \vec{e}_b)\vec{e}_b = \frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}}\vec{e}_t - \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}}\vec{e}_b.$$

Enačbe gibanja, ki jih dobimo iz Newtonovega zakona

$$\frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}}\vec{e}_t - \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}}\vec{e}_b + F_n\vec{e}_n + F_b\vec{e}_b = m(\ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n),$$

se po komponentah glasijo:

$$\begin{aligned} \vec{e}_t: &\quad \frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}} = m\ddot{s}, \\ \vec{e}_n: &\quad F_n = m\kappa\dot{s}^2, \\ \vec{e}_b: &\quad F_b - \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}} = 0. \end{aligned}$$

Enačba v tangentni smeri določa gibanje točke, medtem ko lahko iz preostalih dveh enačb izračunamo silo vijačnice na točko.

Z dvakratnim integriranjem enačbe v tangentni smeri ter upoštevanjem začetnih pogojev $s(0) = 0$ in $\dot{s}(0) = 0$ dobimo

$$s(t) = \frac{1}{2}\, g \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\, t^2.$$

Vidimo, da se točka giblje enakomerno pospešeno. Zanimivo je še pogledati, kako se spreminjata med gibanjem parameter ϕ in pa vertikalna komponenta točke. Iz zveze $s(t) = R\sqrt{1+k^2}\,\phi(t)$ lahko izpeljemo

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\, g \frac{k}{R(1+k^2)}\, t^2,$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}\, g \frac{k^2}{1+k^2}\, t^2.$$

V vertikalni smeri točka pada s pospeškom $g\frac{k^2}{1+k^2}$. Če je vijačnica zelo strma, je ta pospešek primerljiv s težnim pospeškom, pri zelo položni vijačnici pa je ta pospešek lahko poljubno majhen. Za konec izračunajmo še komponenti sile vijačnice na točko:

$$F_n = \frac{mg^2k^2}{R(1+k^2)^2}\, t^2,$$
$$F_b = \frac{mg}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Komponenta sile v normalni smeri zaradi naraščajoče hitrosti točke ves čas raste, medtem ko je komponenta v smeri binormale konstantna in nasprotno enaka komponenti sile teže v smeri binormale.

Opomba: Če ne upoštevamo trenja, sila vijačnice nima bistvenega vpliva na dinamiko materialne točke. V splošnem pa lahko trenje modeliramo tako, da rešujemo gibalno enačbo

$$\frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}} + F_{tr} = m\ddot{s},$$

kjer je $F_{tr} = -\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{s})\sqrt{F_n^2 + F_b^2}$, μ pa koeficient trenja med točko in vijačnico (če bi bili zelo natančni, bi morali v trenutku mirovanja vzeti malce drugačen nastavek). V tem primeru se točka ne bo pospeševala v nedogled, ampak le do hitrosti, pri kateri bi bila sila trenja nasprotno enaka dinamični komponenti sile teže. To limitno vrednost hitrosti točke lahko izračunamo iz enačbe

$$\frac{mgk}{\sqrt{1+k^2}} = \mu\sqrt{F_n^2 + F_b^2},$$

da dobimo

$$v_{max} = \sqrt[4]{\left(\frac{Rg}{\mu}\right)^2 (1+k^2)(k^2-\mu^2)}.$$

Če je koeficient lepenja prevelik ($\mu_l \geq k$), se točka sploh ne bo začela gibati. $\square$