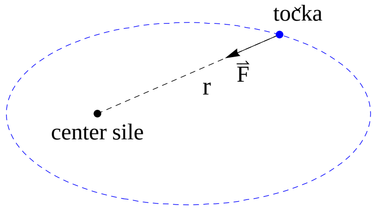
Mehanika 1

Gibanje v polju centralne sile

Gibanje točke v polju centralne sile je v osnovi sicer trodimenzionalno, z upoštevanjem ohranitvenih količin pa ga lahko reduciramo na dinamiko enega samega parametra.



Sila na točko je centralna, če:

· ves čas kaže proti centru sile,

· je njena velikost odvisna samo od razdalje točke od centra sile,

· je dana s potencialom.

To pomeni, da jo lahko zapišemo v obliki

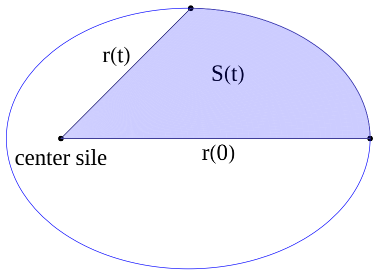
$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r,$$

kjer je r razdalja točke od centra sile, $F(r) = -V'(r)$ za nek potencial $V : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ in $\vec{e}_r$ enotski vektor ki kaže od centra sile do točke. Iz definicije centralne sile lahko izpeljemo, da se pri gibanju v polju centralne sile ohranjata:

(1) skupna energija E točke,

(2) vrtilna količina $\vec{l}$ točke glede na center sile.

Ohranitev teh dveh količin nam omogoča, da dinamiko točke v polju centralne sile reduciramo na dinamiko parametra r.



V tesni povezavi z vrtilno količino je ploščinska hitrost. Velja namreč

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m},$$

kjer je l predznačena velikost vrtilne količine $\vec{l}$ in m masa točke. Ker je vrtilna količina točke konstantna, se pri gibanju v polju centralne sile ohranja tudi ploščinska hitrost točke, čemur bi lahko rekli posplošeni 2. Keplerjev zakon. Pri mehaniki namesto s ploščinsko hitrostjo raje operiramo z dvojno ploščinsko hitrostjo

$$C_0 = 2\frac{dS}{dt} = \frac{l}{m}.$$

(1) Gibanje točke po ravnini je podano v polarnem koordinatnem sistemu z enačbama:

$$r(t) = be^{kt},$$
$$\phi(t) = ct,$$

kjer so b, c in k pozitivne konstante.

(a) Izračunaj hitrost in pospešek v polarnih koordinatah.

(b) Dokaži, da je kot med vektorjema pospeška in hitrosti konstanten.

Rešitev: Koordinatni sistem na odprti podmnožici $U \subset \mathbb{R}^2$ je gladka injektivna preslikava:

$$\Phi : U \to \mathbb{R}^2,$$
$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)),$$

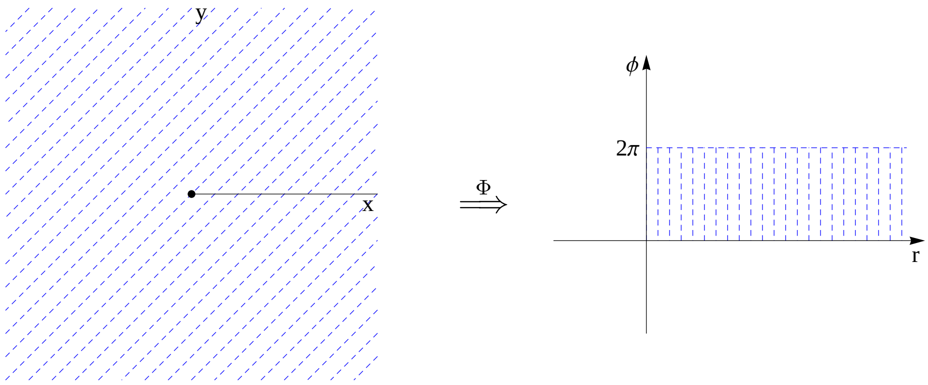
ki ima povsod neizrojeno Jacobijevo matriko.

V primeru polarnih koordinat ponavadi vzamemo:

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\},$$
$$\Phi(U) = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2,$$

preslikava Φ pa je definirana implicitno s predpisom:

$$x = r\cos\phi,$$
$$y = r\sin\phi.$$



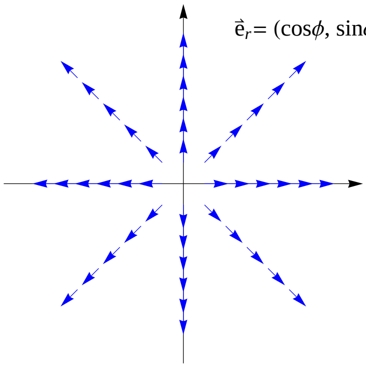
Če preslikamo koordinatni vektorski polji v (r, ϕ)-koordinatah z odvodom preslikave Φ^{-1}, dobimo na U vektorski polji:

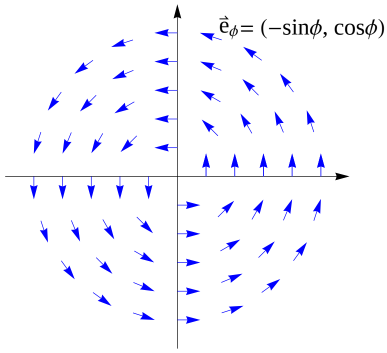
$$\vec{g}_r = \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}\right) = (\cos\phi, \sin\phi) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$
$$\vec{g}_\phi = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}, \frac{\partial y}{\partial \phi}\right) = (-r\sin\phi, r\cos\phi) = (-y, x).$$

Pri mehaniki raje uporabljamo prirejeni enotski vektorski polji:

$$\vec{e}_r = (\cos\phi, \sin\phi),$$
$$\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi).$$

Vektorsko polje $\vec{e}_r$ kaže v smeri naraščanja funkcije r, vektorsko polje $\vec{e}_\phi$ pa v smeri naraščanja funkcije ϕ.





(a) Če imamo gibanje točke opisano v polarnih koordinatah, lahko njen položaj opišemo z vektorsko funkcijo

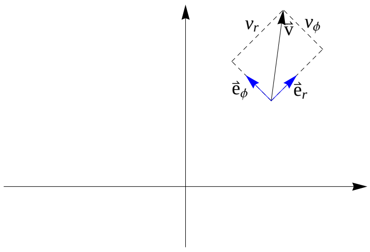
$$\vec{r}(t) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t)).$$

Z odvajanjem dobimo, da je hitrost točke enaka

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi, \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi.$$

Komponenti hitrosti imenujemo:

- $v_r = \dot{r}$ radialna hitrost,
- $v_\phi = r\dot{\phi}$ obodna hitrost.



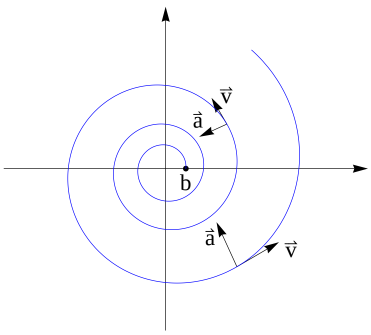
Če odvajamo hitrost, dobimo pospešek točke v polarnih koordinatah

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi,$$

posamezni členi pospeška pa so:

- $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$ radialni pospešek,
- $a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}$ obodni pospešek.

(b) Enačbi $r(t) = be^{kt}$ in $\phi(t) = ct$ določata gibanje točke po logaritmični spirali.



Hitrost in pospešek točke sta enaka:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi = bke^{kt}\vec{e}_r + bce^{kt}\vec{e}_\phi,\\
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi = (bk^2e^{kt} - bc^2e^{kt})\vec{e}_r + (2bcke^{kt} + 0)\vec{e}_\phi.
\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da sta vektorski polji $\vec{e}_r$ in $\vec{e}_\phi$ pravokotni, od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\cos\phi &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}|\,|\vec{a}|},\\
&= \frac{bke^{kt}\cdot be^{kt}(k^2-c^2) + bce^{kt}\cdot 2bcke^{kt}}{\sqrt{b^2k^2e^{2kt}+b^2c^2e^{2kt}}\sqrt{b^2e^{2kt}(k^2-c^2)^2+4b^2c^2k^2e^{2kt}}},\\
&= \frac{b^2k(k^2-c^2)+2b^2c^2k}{\sqrt{b^2(k^2+c^2)}\sqrt{b^2(k^2-c^2)^2+4b^2c^2k^2}},\\
&= \frac{k(k^2+c^2)}{\sqrt{k^2+c^2}\sqrt{(k^2+c^2)^2}},\\
&= \frac{k}{\sqrt{k^2+c^2}}.
\end{aligned}$$

□

(2) Točka z maso m se giblje v polju centralne sile po stožnici z goriščem v centru sile

$$r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}.$$

S pomočjo Binetove formule izračunaj centralno silo in efektivni potencial.

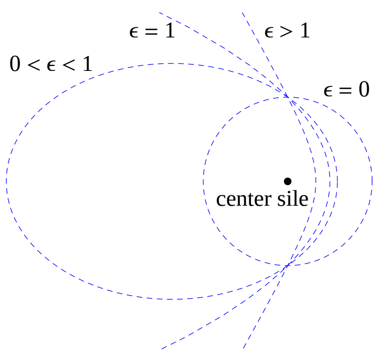
Rešitev: Binetova formula

$$a_r = -C_0^2u^2(u'' + u)$$

povezuje obliko centralne sile in pa enačbo tira gibanja. Tir podamo v obliki $r = r(\phi)$, z u pa nato označimo obratno vrednost razdalje točke od centra sile oziroma $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$.

Če imamo dan tir točke, lahko z odvajanjem in pa z uporabo Binetove formule ponavadi brez večjih težav izračunamo, kakšna sila deluje nanjo. V kolikor pa imamo dano silo, pa moramo za izračun tira rešiti diferencialno enačbo drugega reda, kar pa je v splošnem dokaj težko.

V našem primeru je tir točke stožnica $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$. Če je $\epsilon = 0$ tako dobimo krožnico, pri $0 < \epsilon < 1$ elipso, pri $\epsilon = 1$ parabolo, pri $\epsilon > 1$ pa hiperbolo.



Iz enakosti:

$$u(\phi) = \frac{1}{p}(1 + \epsilon \cos \phi),$$
$$u''(\phi) = -\frac{\epsilon}{p} \cos \phi,$$

lahko sedaj izpeljemo

$$a_r = -C_0^2 \frac{1}{p^2}(1 + \epsilon \cos \phi)^2 \cdot \frac{1}{p} = -\frac{C_0^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Če je tir točke stožnica, mora torej biti sila obratno sorazmerna s kvadratom oddaljenosti točke od centra sile. Zanimiv poseben primer takšne sile je gravitacijska sila. Če imamo telesi z masama m in $M >> m$, lahko privzamemo, da je večje telo skoraj pri miru v centru sile, gibanje manjšega telesa pa obravnavamo kot gibanje v polju gravitacijske centralne sile. Tir manjšega telesa je v tem primeru določen z energijo in pa vrtilno količino telesa na naslednji način:

$$p = \frac{l^2}{m\gamma},$$
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{m\gamma^2}},$$

kjer je $\gamma = mM\kappa$, κ pa gravitacijska konstanta. Pospešek in sila nanj pa sta:

$$a_r(r) = -\frac{M\kappa}{r^2},$$
$$F(r) = -\frac{\gamma}{r^2}.$$

V splošnem je centralna sila definirana s predpisom $F(r) = -V'(r)$, od koder dobimo, da je gravitacijski potencial enak

$$V(r) = \int_r^\infty F(r)\, dr = -\gamma \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{\gamma}{r}.$$

Potencial ponavadi izberemo tako, da v neskončnosti limitira proti nič.

Pri gibanju točke v polju centralne sile igra pomembno vlogo efektivni potencial

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Z uvedbo efektivnega potenciala lahko dinamiko točke reduciramo na dinamiko parametra r, saj velja

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E.$$

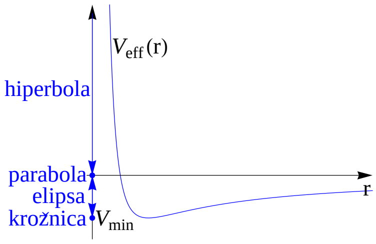
Če vemo, kakšen je efektivni potencial, lahko kvalitativno obravnavamo, kako se spreminja oddaljenost točke od centra sile, z integriranjem pa lahko tudi izračunamo $r = r(t)$. Spreminjanje polarnega kota lahko nato izračunamo s pomočjo Keplerjevega zakona

$$\dot{\phi} = \frac{C_0}{r^2}.$$

V primeru gravitacijske sile je efektivni potencial enak

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Minimalna možna energija točke je enaka $V_{min} = -\frac{m\gamma^2}{2l^2}$. Pri tej energiji je tir točke krožnica. Za energije $V_{min} < E < 0$ se točka giblje po elipsi, pri energiji $E = 0$ po paraboli, pri energijah $E > 0$ pa po hiperboli.



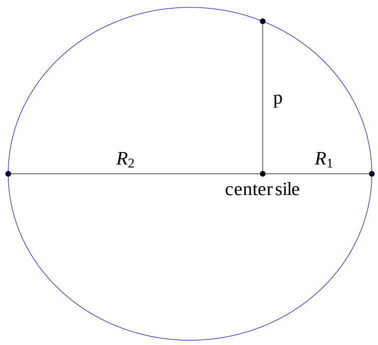
$\square$

(3) Materialna točka z maso m se giblje pod vplivom centralne sile s potencialom $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$ po eliptični orbiti $r(\phi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$, kjer je $p = \frac{l^2}{m\gamma}$, $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2l^2E}{m\gamma^2}}$ in $\gamma = mM\kappa$.

(a) Pokaži, da velja $E = -\frac{\gamma}{2a}$ in $v^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$, kjer je a velika polos eliptične orbite.

(b) Opiši postopek prehoda iz krožne orbite s polmerom R_1 v krožno orbito s polmerom $R_2 > R_1$.

Rešitev: (a) Označimo z R_1 in R_2 minimalno ter maksimalno oddaljenost točke od centra sil.



Po eni strani potem velja $R_1 + R_2 = 2a$, iz enačbe orbite pa dobimo:

$$R_1 = \frac{p}{1+\epsilon},$$
$$R_2 = \frac{p}{1-\epsilon}.$$

Od tod sledi

$$2a = R_1 + R_2 = \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} = \frac{2p}{1-\epsilon^2}.$$

Če upoštevamo vrednosti p in ϵ, dobimo

$$a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{l^2}{m\gamma\left(-\frac{2l^2E}{m\gamma^2}\right)} = -\frac{\gamma}{2E}.$$

Energija točke, ki se giblje po eliptični orbiti pod vplivom gravitacijskega potenciala, je tako enaka

$$E = -\frac{\gamma}{2a}.$$

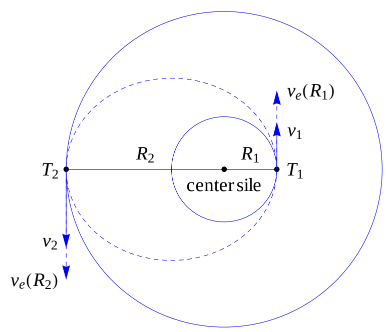
Vidimo, da je energija točke odvisna samo od velike polosi elipse, ne pa tudi od njene ekscentričnosti. Ker se skupna energija točke med gibanjem ohranja, mora veljati

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma}{r} = E = -\frac{\gamma}{2a}.$$

Od tod lahko izpeljemo formulo

$$v^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right).$$

(b) Opišimo najprej postopek prehoda med krožnima orbitama kvalitativno. Na začetku točka kroži po krožnici s polmerom R_1 s konstantno hitrostjo. Če ji ustrezno povečamo hitrost v obodni smeri, se bo utirila v tako imenovano Hohmannovo prenosno eliptično orbito, tako da bo v začetnem trenutku v njenem pericentru. Ko pride točka do apocentra, ji moramo še enkrat ustrezno povečati hitrost, da se utiri v krožno orbito s polmerom R_2.



V krožni orbiti s polmerom R_1 je hitrost točke enaka: $v_1^2 = \frac{\gamma}{mR_1}$. Če jo hočemo utiriti v eliptično orbito z apsidnima razdaljama R_1 in R_2, jo moramo v obodni smeri pospešiti do hitrosti

$$v_e^2(R_1) = \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}\right).$$

Kvocient kvadratov hitrosti je enak

$$\frac{v_e^2(R_1)}{v_1^2} = \frac{\frac{2\gamma}{m}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}\right)}{\frac{\gamma}{mR_1}} = \frac{2R_2}{R_1+R_2},$$

od koder sledi

$$v_e(R_1) = v_1\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}.$$

V krožni orbiti s polmerom R_2 mora imeti točka hitrost $v_2^2 = \frac{\gamma}{mR_2}$. Ko pride točka v apocenter eliptične orbite, jo moramo torej pospešiti s hitrosti $v_e(R_2)$ do hitrosti v_2. Kvocient hitrosti je enak

$$\frac{v_2^2}{v_e^2(R_2)} = \frac{\frac{\gamma}{mR_2}}{\frac{2\gamma}{m}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1+R_2}\right)} = \frac{R_1 + R_2}{2R_1},$$

oziroma

$$v_2 = v_e(R_2)\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_1}}.$$

□

(4) Točka z maso m se giblje pod vplivom centralne sile po lemniskati

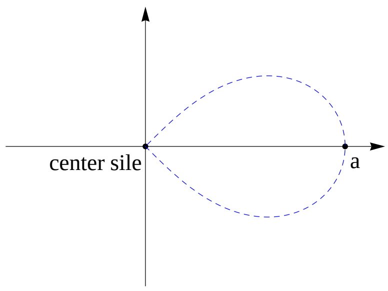
$$r(\phi) = a\sqrt{\cos 2\phi},$$

kjer je a pozitivna konstanta.

(a) Določi centralno silo.

(b) Določi čas prihoda v center sil, če je na začetku točka v apocentru in ima hitrost v.

Rešitev: (a) Najprej si poglejmo skico lemniskate. V tem primeru tir točke seka center sile.



Za izračun centralne sile bomo spet uporabili Binetovo formulo. Iz $u(\phi) = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\phi}}$ dobimo

$$u'(\phi) = \frac{1}{a} \cdot \frac{-2\sin 2\phi}{(\sqrt{\cos 2\phi})^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin 2\phi}{(\sqrt{\cos 2\phi})^3}$$

in

$$\begin{aligned} u''(\phi) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{2\cos 2\phi(\cos 2\phi)^{\frac{3}{2}} - \sin 2\phi \cdot \frac{3}{2}(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}(-2\sin 2\phi)}{\cos^3 2\phi}, \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}\sin^2 2\phi}{\cos^3 2\phi}. \end{aligned}$$

Pospešek točke v radialni smeri je tako enak:

$$\begin{aligned}
a_r &= -C_0^2 u^2 (u'' + u), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^2 \cos 2\phi} \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} \sin^2 2\phi}{\cos^3 2\phi} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos 2\phi}} \right), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^3 \cos 2\phi} \left(\frac{2(\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}} + 3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos^2 2\phi) + (\cos 2\phi)^{\frac{5}{2}}}{\cos^3 2\phi} \right), \\
&= -\frac{C_0^2}{a^3 \cos 2\phi} \cdot \frac{3(\cos 2\phi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3 2\phi}, \\
&= -\frac{3C_0^2}{a^3 (\cos 2\phi)^{\frac{7}{2}}}, \\
&= -\frac{3C_0^2 a^4}{r^7},
\end{aligned}$$

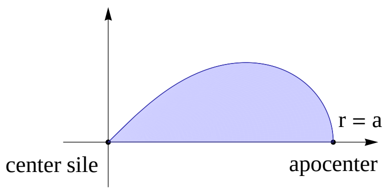
centralna sila pa

$$F(r) = -\frac{3mC_0^2 a^4}{r^7}.$$

(b) Za določanje časa, ki ga točka porabi za pot med dvema točkama na svojem tiru, lahko uporabimo Keplerjev zakon. Če označimo z S ploščino lika, ki ga točka opiše na poti med danima točkama, je čas, ki ga porabi za to pot, enak

$$T = \frac{2S}{C_0}.$$

Če hočemo torej izračunati čas, ki ga točka porabi, da pride iz apocentra v center sile, moramo izračunati ploščino lika, ki ga opiše med potjo.



Polovična ploščina lemniskate je enaka

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\phi \, d\phi = \frac{a^2}{4} \sin 2\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Preostane nam še, da izrazimo C_0 z začetnim položajem in z začetno hitrostjo točke. V splošnem lahko hitrost točke zapišemo v obliki

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi.$$

V apocentru je točka na maksimalni oddaljenosti od centra sile, zato je tam $\dot{r} = 0$, kar pomeni, da je

$$v = r\dot{\phi}.$$

Če upoštevamo še Keplerjev zakon $r^2\dot{\phi} = C_0$, dobimo iz dejstva, da je v apocentru $r = a$, zvezo
$$C_0 = va.$$
Čas, ki ga točka porabi, da pride iz apocentra v center sile, je tako enak
$$T = \frac{a}{2v}.$$

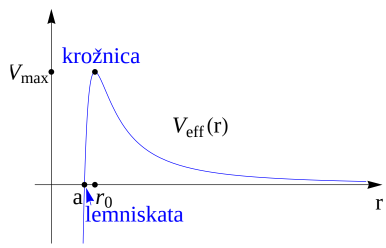
Opomba 1:

Če bi hoteli izračunati trajektorijo točke, bi morali integrirati diferencialno enačbo
$$\dot{\phi} = \frac{C_0}{r^2} = \frac{C_0}{a^2\cos 2\phi},$$
pri začetnem pogoju $\phi(0) = 0$. To je diferencialna enačba z ločljivima spremenljivkama, ki ima rešitev
$$\phi(t) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2C_0}{a^2}t\right).$$
Z upoštevanjem oblike tira od tod dobimo še
$$r(t) = a\sqrt[4]{1 - \frac{4C_0^2}{a^4}\,t^2}.$$

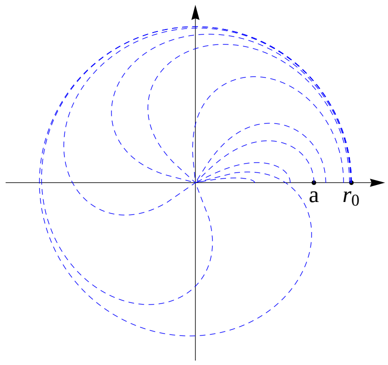
Opomba 2:

Efektivni potencial točke pri gibanju v polju centralne sile $F(r) = -\frac{3mC_0^2a^4}{r^7}$ je enak
$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{mC_0^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{a^4}{r^6}\right).$$

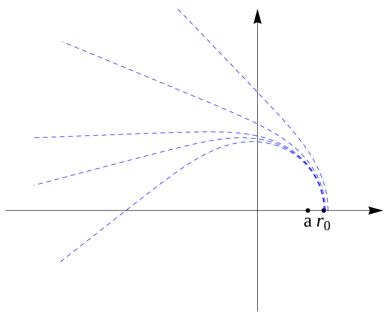
Če se točka giblje pod vplivom sile F, dobimo pri različnih energijah različne oblike tira. Obravnavali bomo primere, ko je $\dot{r}(0) = 0$ in $\phi(0) = 0$. To pomeni, da točka začne gibanje v apocentru ali pa v pericentru. Gibanju po lemniskati ustreza primer, ko je skupna energija točke enaka $E = 0$, oziroma, ko je apsidna razdalja enaka $r = a$.



Pri ostalih energijah dobimo tire, ki jih je v splošnem težko analitično izračunati. Tiri so omejeni v primerih, ko je apsidna razdalja točke manjša od $r_0 = \sqrt[4]{3}a$. Ko se apsidna razdalja tira približuje r_0, se oblika tira približuje krožnici, pri apsidni razdalji r_0 pa je tir točke krožnica.



Točkam, ki ležijo desno od r_0 na grafu efektivnega potenciala, ustrezajo neomejeni tiri.



□

(5) Točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile

$$\vec{F}(r) = -\frac{C_0^2(1+a^2)m}{r^3}\vec{e}_r,$$

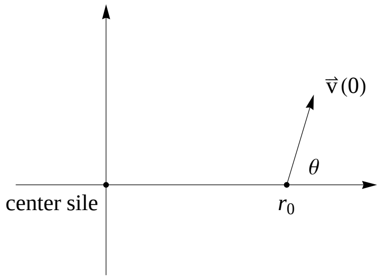
kjer je a pozitivna konstanta. V začetnem trenutku je na oddaljenosti r_0 od centra sil pod kotom $\phi = 0$ in ima radialno hitrost enako $v_r = \frac{aC_0}{r_0}$. Izračunaj tirnico in trajektorijo točke.

Rešitev: Začetni položaj in začetna hitrost točke sta:

$$\vec{r}(0) = (r_0, 0),$$
$$\vec{v}(0) = \left(\frac{aC_0}{r_0}, \frac{C_0}{r_0}\right).$$

Obodno komponento hitrosti smo dobili z upoštevanjem Keplerjevega zakona. Od tod vidimo, da parameter a določa kot med začetno hitrostjo in pa abscisno osjo, saj je

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{a}.$$



<u>Tir gibanja</u>:

Radialni pospešek točke je enak

$$a_r = -\frac{C_0^2(1+a^2)}{r^3} = -C_0^2(1+a^2)u^3.$$

Od tod z uporabo Binetove formule pridemo do diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} a_r &= -C_0^2 u^2(u''+u), \\ -C_0^2(1+a^2)u^3 &= -C_0^2 u^2(u''+u), \\ (1+a^2)u &= u''+u, \\ u''-a^2u &= 0. \end{aligned}$$

Splošno rešitev te diferencialne enačbe lahko zapišemo v obliki

$$u(\phi) = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi}.$$

Za določitev konstant A in B potrebujemo še začetna pogoja $u(0)$ in $u'(0)$. Direktno iz predpostavk naloge sledi, da je

$$u(0) = \frac{1}{r(0)} = \frac{1}{r_0}.$$

Funkcija $u'(\phi)$ je v povezavi z obliko tira, ni pa v direktni povezavi s hitrostjo točke. Lahko pa jo izrazimo tudi na naslednji način

$$u'(\phi) = \frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{d\phi} = \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = \frac{-\frac{\dot{r}}{r^2}}{\frac{C_0}{r^2}} = -\frac{\dot{r}}{C_0^2}.$$

Začetna hitrost točke v radialni smeri je enaka $\dot{r}(0) = v_r(0) = \frac{aC_0}{r_0}$, od koder dobimo

$$u'(0) = -\frac{a}{r_0}.$$

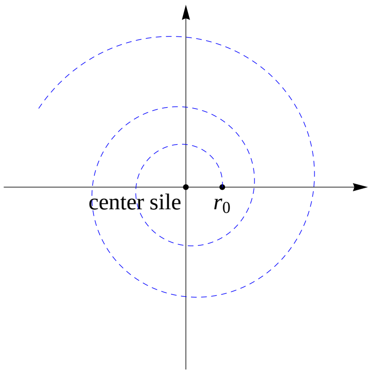
Z upoštevanjem začetnih pogojev dobimo sistem enačb, ki mu zadoščata A in B:

$$\begin{aligned} u(0) &= A + B = \frac{1}{r_0}, \\ u'(0) &= aA - aB = -\frac{a}{r_0}. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $A = 0$, $B = \frac{1}{r_0}$. Sledi

$$r(\phi) = r_0 e^{a\phi}.$$

Tir materialne točke je torej logaritmična spirala.



<u>Trajektorija gibanja</u>:

Pri določanju trajektorije gibanja nas ne zanima samo kakšno krivuljo opiše točka med gibanjem, ampak tudi kako se (v odvisnosti od časa) giblje po njej. Če poznamo tir točke, lahko njeno trajektorijo dobimo z upoštevanjem Keplerjevega zakona

$$r^2\dot{\phi} = C_0.$$

V primeru, ko je $r(\phi) = r_0 e^{a\phi}$, pridemo do diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{C_0}{r_0^2 e^{2a\phi}}, \\ e^{2a\phi}\, d\phi &= \frac{C_0}{r_0^2} dt, \\ \frac{1}{2a} e^{2a\phi} &= \frac{C_0}{r_0^2} t + A. \end{aligned}$$

Ker je $\phi(0) = 0$, je $A = \frac{1}{2a}$, trajektorija točke pa je podana s predpisom

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{2aC_0}{r_0^2} t + 1\right), \\ r(t) &= r_0 \sqrt{\frac{2aC_0}{r_0^2} t + 1}. \end{aligned}$$

□