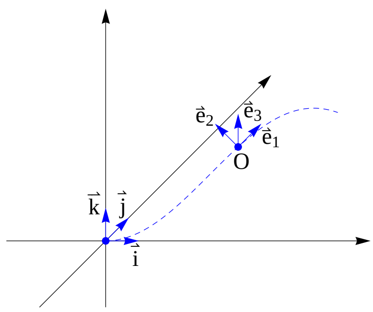
Mehanika 1

Gibanje v relativnem koordinatnem sistemu

Drugi Newtonov zakon lahko uporabimo samo za opis dinamike gibanja točke v nekem inercialnem koordinatnem sistemu. Včasih pa lahko gibanje točke precej bolj preprosto opišemo v koordinatnem sistemu, ki ni inercialen. V tem poglavju bomo spoznali, kakšno obliko imajo gibalne enačbe v takšnih koordinatnih sistemih.

Praviloma bomo imeli opravka z dvema koordinatnima sistemoma. Absolutni koordinatni sistem AKS bo ponavadi inercialen, relativni koordinatni sistem pa bomo izbrali tako, da bomo čimbolj poenostavili opis gibanja točke.



Položaj RKS glede na AKS je določen z naslednjima podatkoma:

· položajem O izhodišča RKS glede na AKS,
· orientacijo RKS glede na AKS.

Bazo absolutnega koordinatnega sistema označimo z vektorji $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, bazo relativnega koordinatnega sistema pa z vektorji $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Glede na to, da imamo ves čas opravka z dvema bazama hkrati, zaradi enostavnosti uporabljamo naslednji dogovor. Če je $\vec{u}$ poljuben vektor, uporabljamo oznako:

· $\vec{u}$, kadar razvijamo vektor $\vec{u}$ glede na bazo RKS,
· $\vec{u}'$, kadar razvijamo vektor $\vec{u}$ glede na bazo AKS.

V relativnem koordinatnem sistemu lahko Newtonov zakon zapišemo v obliki

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - \vec{F}_{\text{sist}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Pri tem je $\vec{F}$ vsota zunanjih sil na točko, ostali členi na desni pa so posledica neinercialnosti relativnega koordinatnega sistema. Imenujemo jih po vrsti:

· $-m\vec{a}_0$	translacijska sila,
· $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}$	Coriolisova sila,
· $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$	centrifugalna sila,
· $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$	inercijska sila rotacije.

Z $\vec{a}_0$ označimo pospešek izhodišča RKS glede na AKS, z $\vec{r}$, $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{\vec{r}}$ in $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{\vec{r}}$ pa položaj, hitrost in pospešek točke glede na izhodišče RKS.

Bolj podrobno bomo kinematiko vrtenja spoznali v naslednjih poglavjih, zaenkrat pa se bomo omejili na primer, ko se RKS vrti glede na AKS okoli fiksne osi. Večinoma bomo imeli opravka z naslednjimi primeri relativnega gibanja RKS glede na AKS:

· orientaciji obeh sistemov sovpadata, izhodišče RKS pa se giblje glede na AKS,

· izhodišči obeh sistemov sovpadata, RKS pa se vrti glede na AKS okrog fiksne osi,

· kombinacija zgornjih dveh primerov.

Vrtenje okoli fiksne osi $\vec{e}$ je določeno s funkcijo $t \to \phi(t)$. V tem primeru je

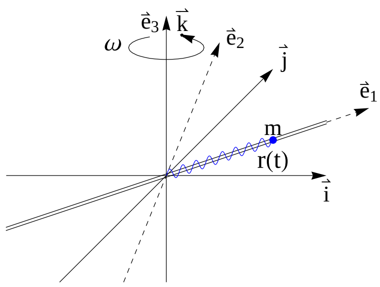
$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e},$$
$$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\phi}\vec{e}.$$

(1) Dolga vodoravna cev se z enakomerno kotno hitrostjo ω vrti okoli navpične osi. Po njej se brez trenja in pod vplivom sile teže giblje točka z maso m. Privzemimo, da je točka preko vzmeti v smeri palice povezana z osjo vrtenja. Vzmet ima koeficient k, neraztegnjena pa ima dolžino r_0.

(a) Izberi si primeren relativni koordinatni sistem in v njem zapiši Newtonove enačbe.

(b) Pokaži, da za $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ točka harmonično niha in poišči frekvenco nihanja ter ravnovesno lego.

Rešitev: (a) Bazo relativnega koordinatnega sistema izberimo tako, da se bo vrtela skupaj s cevjo, vektor $\vec{e}_1$ pa bo kazal v smeri cevi.



V AKS lahko bazo RKS izrazimo v naslednji obliki:

$$\vec{e}_1{}' = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0),$$
$$\vec{e}_2{}' = (-\sin\omega t, \cos\omega t, 0),$$
$$\vec{e}_3{}' = (0, 0, 1).$$

Položaj točke v RKS lahko opišemo z enim parametrom, in sicer z oddaljenostjo od osi vrtenja, tako da je

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_1.$$

Od tod lahko izračunamo tudi relativno hitrost in relativni pospešek točke:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_1,$$
$$\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_1.$$

Relativni koordinatni sistem se vrti enakomerno okoli navpične osi, zato je:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_3,$$
$$\dot{\vec{\omega}} = 0,$$

ker pa izhodišči obeh koordinatnih sistemov sovpadata, je tudi $\vec{a}_0 = 0$.
Zapišimo sedaj Newtonov zakon v relativnem koordinatnem sistemu

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - \vec{F}_{\text{sist}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}.$$

Če upoštevamo, da so nekateri členi v zgornji enačbi ničelni, pridemo do enačbe

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Preostane nam še, da zapišemo zunanje sile in pa Coriolisov ter centrifugalni pospešek v bazi RKS. Za oba pospeška dobimo:

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 r \vec{e}_1,$$
$$2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} = 2\omega \dot{r} \vec{e}_2,$$

sile na točko pa so:

$$\vec{F}_g = -mg\vec{e}_3,$$
$$\vec{F}_{\text{vzmeti}} = -k(r - r_0)\vec{e}_1,$$
$$\vec{F}_{\text{cevi}} = F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3.$$

Pri tem smo upoštevali, da se točka giblje po cevi brez trenja, zato deluje cev na točko samo v smeri normale na cev.
Newtonov zakon lahko sedaj zapišemo v vektorski obliki

$$m\ddot{r}\vec{e}_1 = -k(r - r_0)\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + (F_3 - mg)\vec{e}_3 - 2m\omega\dot{r}\vec{e}_2 + m\omega^2 r\vec{e}_1,$$

ali pa po komponentah:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 :& \quad m\ddot{r} + k(r - r_0) - m\omega^2 r = 0, \\ \vec{e}_2 :& \quad F_2 = 2m\omega\dot{r}, \\ \vec{e}_3 :& \quad F_3 = mg. \end{aligned}$$

Neznanke so obe komponenti sile cevi in pa trajektorija točke $r = r(t)$. Enačba v smeri cevi določa gibanje točke, iz obeh enačb v normalnih smereh pa lahko izračunamo silo cevi na točko.
(b) Enačbo gibanja točke lahko prepišemo v obliko

$$m\ddot{r} + (k - m\omega^2)r = kr_0.$$

To je enačba nihanja, če je $k - m\omega^2 > 0$. V tem primeru je:

- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2}$ frekvenca nihanja,
- $r = \dfrac{kr_0}{k - m\omega^2}$ ravnovesna lega.

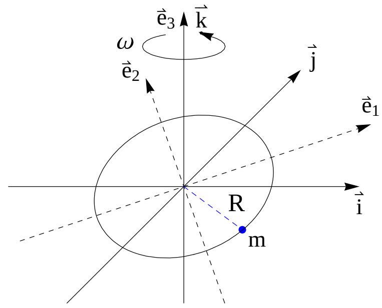
□

(2) Krožnica s polmerom R se z enakomerno kotno hitrostjo ω vrti okoli premera v smeri navpične osi. Po njej se brez trenja in pod vplivom sile teže giblje točka z maso m.

(a) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje parametra ϕ.

(b) Poišči ravnovesne lege in jih klasificiraj.

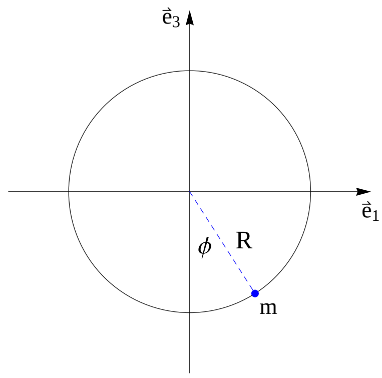
Rešitev: (a) Bazo relativnega koordinatnega sistema izberimo tako, da bo vektor $\vec{e}_1$ ležal v ravnini krožnice, vektor $\vec{e}_3$ pa bo kazal v smeri osi vrtenja.



V AKS se baza RKS spet izrazi v obliki:

$$\begin{aligned}
\vec{e_1}' &= (\cos\omega t, \sin\omega t, 0),\\
\vec{e_2}' &= (-\sin\omega t, \cos\omega t, 0),\\
\vec{e_3}' &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Če opazujemo gibanje točke v relativnem koordinatnem sistemu, se točka giblje po krožnici s polmerom R, zato lahko njen položaj opišemo z enim parametrom. Izbrali si bomo kot med navpičnico in pa radij vektorjem točke.



Pri zapisu gibalnih enačb bomo kombinirali Newtonove enačbe v RKS z enačbami gibanja točke po krivulji. Položaj in hitrost točke v RKS sta:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= R(\sin\phi, 0, -\cos\phi),\\
\dot{\vec{r}}(t) &= R\dot{\phi}(\cos\phi, 0, \sin\phi).
\end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\dot{s} &= R\dot{\phi},\\
\vec{e}_t &= (\cos\phi, 0, \sin\phi),\\
\vec{e}_n &= (-\sin\phi, 0, \cos\phi).
\end{aligned}$$

Na točko delujeta sila teže in pa sila obroča:

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= (0,0,-mg) = -mg\sin\phi\,\vec{e}_t - mg\cos\phi\,\vec{e}_n,\\ \vec{F}_{\text{obroča}} &= F_b\vec{e}_b + F_n\vec{e}_n.\end{aligned}$$

Privzeli smo, da med točko in obročem ni trenja, zato sila obroča nima komponente v tangentni smeri. Če upoštevamo, da je $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$ in $\vec{a}_0 = 0$, se Newtonov zakon v RKS poenostavi v

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{obroča}} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}).$$

Relativni pospešek lahko zapišemo v obliki

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_n,$$

izračunati pa moramo še Coriolisov ter centrifugalni pospešek. Po kratkem računu dobimo:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) &= -\omega^2 R\sin\phi\,\vec{e}_1,\\ 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{rel}} &= 2\omega R\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Tako pridemo do vektorske oblike gibalnih enačb

$$m\ddot{s}\vec{e}_t + m\frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_n = -mg\sin\phi\,\vec{e}_t - mg\cos\phi\,\vec{e}_n + F_b\vec{e}_b + F_n\vec{e}_n + m\omega^2R\sin\phi\,\vec{e}_1 - 2m\omega R\dot{\phi}\cos\phi\,\vec{e}_2.$$

Gibanje točke določa komponenta te enačbe v tangentni smeri na krožnico. Dobimo jo tako, da vektorsko enačbo skalarno pomnožimo z $\vec{e}_t$. Tako pridemo do enačbe

$$m\ddot{s} = mR\ddot{\phi} = -mg\sin\phi + m\omega^2R\sin\phi\cos\phi.$$

To je diferencialna enačba drugega reda za funkcijo $\phi = \phi(t)$. Če obe strani enačbe pomnožimo s $\dot{\phi}$, jo lahko integriramo do zakona o ohranitvi energije:

$$\begin{aligned}mR\ddot{\phi}\dot{\phi} &= -mg\sin\phi\,\dot{\phi} + m\omega^2R\sin\phi\cos\phi\,\dot{\phi},\\ \frac{1}{2}mR\dot{\phi}^2 &= mg\cos\phi + \frac{1}{2}m\omega^2R\sin^2\phi + C.\end{aligned}$$

Če zadnjo enačbo pomnožimo z R in jo malce preuredimo, pridemo do enačbe

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR\cos\phi - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\phi = E.$$

Posamezni členi na levi strane enačbe imajo naslednjo fizikalno interpretacijo:

- $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$ kinetična energija,
- $-mgR\cos\phi$ potencialna energija sile teže,
- $-\frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\phi$ centrifugalna energija.

Zapišimo sedaj

$$V(\phi) = -mgR\cos\phi - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\phi.$$

V RKS je potem gibanje točke po obroču določeno z enačbo

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + V(\phi) = E,$$

kar pomeni, da smo gibanje točke reducirali na premočrtno gibanje parametra ϕ.
(b) Ravnovesne lege bomo našli s kvalitativno obravnavo potenciala $V = V(\phi)$. Odvod potenciala V je enak

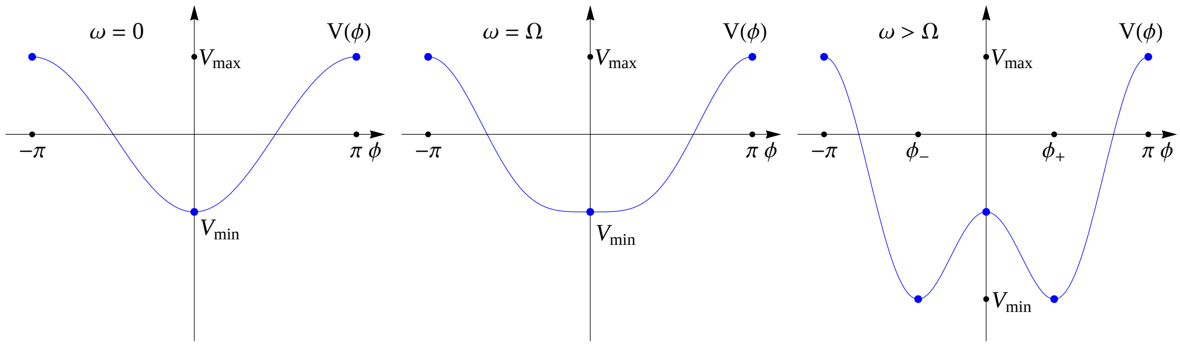
$$V'(\phi) = mR^2 \sin\phi \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos\phi\right).$$

Uvedimo oznako $\Omega^2 = \frac{g}{R}$. Glede na relativno velikost ω in Ω ločimo dva primera.

· Če je $\omega \leq \Omega$, je $\phi = 0$ stabilna, $\phi = \pi$ pa nestabilna ravnovesna lega.

· Če je $\omega > \Omega$, sta $\phi \in \{0, \pi\}$ nestabilni, $\phi = \pm \arccos \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}$ pa stabilni ravnovesni legi.

Če se obroč ne vrti, imamo opravka z matematičnim nihalom, ki ima stabilno ravnovesno lego na dnu obroča. Ko se ω približuje Ω, postaja potencial v okolici te ravnovesne lege vse bolj položen. V mejnem primeru $\omega = \Omega$ je sicer na dnu obroča še vedno stabilna ravnovesna lega, ki pa postane nestabilna, brž ko se hitrost vrtenja še malo poveča.



□