Mehanika 1

Kinematika togega telesa

Splošno gibanje togega telesa ponavadi razstavimo na dva dela:

· gibanje masnega središča,
· vrtenje telesa okrog masnega središča.

Gibanje masnega središča je določeno z Newtonovim zakonom, v tem in v naslednjem poglavju pa bomo spoznali, kako se opiše vrtenje telesa in kakšne so enačbe, ki določajo vrtenje telesa.

Videli bomo, da so količine in enačbe precej podobne tistim, ki določajo gibanje točke po prostoru, bodo pa rahlo bolj komplicirane. Matematični razlog tiči v tem, da je prostor možnih položajev točke vektorski prostor $\mathbb{R}^3$, prostor orientacij togega telesa pa Liejeva grupa SO(3). Na prehodu iz $\mathbb{R}^3$ v SO(3) izgubimo linearno strukturo, pa še grupna operacija postane nekomutativna. Na fizikalnem nivoju pa stvari zakomplicira dejstvo, da je vztrajnostni tenzor togega telesa simetrična 3×3 matrika. Ustrezen analog pri gibanju točke je masa, ki pa je skalar, zato so Newtonove enačbe v splošnem bolj enostavne kot Eulerjeve enačbe. V primeru, ko je vztrajnostni tenzor togega telesa skalarna matrika (kot npr. pri homogeni krogli), pa so Eulerjeve enačbe za vrtenje povsem analogne Newtonovim gibalnim enačbam. Malce težje je v tem primeru le integrirati kotno hitrost do orientacije telesa.

(1) Izračunaj predpis za rotacijo za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$ okrog osi $\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ z Rodriguesovo formulo in s pomočjo kvaternionov.

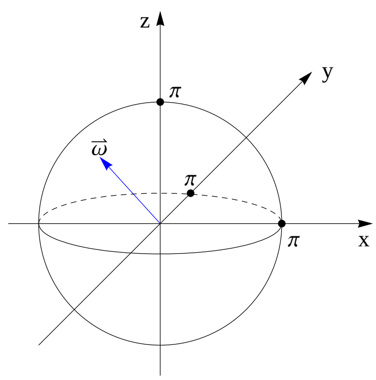
Rešitev: Grupa rotacij prostora $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{SO}(3) = \{Q \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}) \,|\, Q^T Q = \mathrm{I}, \det(Q) = 1\}$$

je tridimenzionalna Liejeva grupa, ki je kot topološki prostor difeomorfna projektivnemu prostoru $\mathbb{R}P^3$. Pri tej nalogi bomo spoznali dve različni parametrizaciji te grupe.

<u>1) $\mathrm{SO}(3) \approx B^3(0,\pi)/\{x \sim -x \text{ za } x \text{ na robu } B^3(0,\pi)\}$</u>:

Pri tej predstavitvi bomo grupo rotacij predstavili kot kvocientni prostor krogle $B^3(0, \pi)$, ki ga dobimo, če identificiramo antipodne točke na sferi, ki je rob krogle.



Izberimo $\vec{\omega} \in B^3(0,\pi)$ in pišimo $\vec{e} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$ ter $\phi = |\vec{\omega}|$. Vektorju $\vec{\omega}$ bomo priredili rotacijo $R(\vec{e},\phi)$ prostora $\mathbb{R}^3$, ki predstavlja vrtenje za kot ϕ okoli osi $\vec{e}$. To pomeni, da:

· smer vektorja $\vec{\omega}$ določa os vrtenja,

· velikost vektorja $\vec{\omega}$ določa kot vrtenja.

Os vrtenja ni dobro definirana za ničelni vektor. Njemu priredimo identično preslikavo. Če hočemo nek vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ zavrteti okrog dane osi $\vec{e}$ za kot ϕ, je zelo uporabna Rodriguesova formula

$$R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{r} = \cos\phi\,\vec{r} + (\vec{e}\cdot\vec{r})(1-\cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\,\vec{e}\times\vec{r}.$$

To formulo lahko uporabimo tudi za zapis rotacijske matrike.

V našem primeru je $\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ in $\vec{r} = (x,y,z)$. Sledi

$$\begin{aligned}
R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{r} &= (\vec{e}\cdot\vec{r})\vec{e} + \sin\phi\,\vec{e}\times\vec{r},\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \times (x,y,z)\,,\\
&= \frac{1}{2}(x+y)\,(1,1,0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z, -\frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\right),\\
&= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).
\end{aligned}$$

Opomba: Ta preslikava je zožitev eksponentne preslikave iz Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$ v Liejevo grupo SO(3). Liejeva algebra

$$\mathfrak{so}(3) = \{W \in \mathrm{Mat}(3\times 3,\mathbb{R}) \,|\, W^T + W = 0\}$$

sestoji iz vseh 3×3 antisimetričnih matrik. Kot vektorski prostor je izomorfna prostoru $\mathbb{R}^3$, eksplicitni izomorfizem pa je dan s preslikavo

$$(w_1,w_2,w_3) \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0. \end{bmatrix}$$

Ta izomorfizem porodi vložitev $i : B(0,\pi) \hookrightarrow \mathfrak{so}(3)$.

Eksponentna preslikava $\exp : \mathfrak{so}(3) \to \mathrm{SO}(3)$ je definirana kot matrični eksponent

$$\exp(W) = e^W = 1 + W + \frac{W}{2!} + \frac{W^3}{3!} + \dots$$

Z upoštevanjem oblike karakterističnih polinomov antisimetričnih matrik lahko izpeljemo, da velja $\exp\circ i = p$, kjer je $p : B(0,\pi) \to \mathrm{SO}(3)$ kvocientna projekcija.

2) SO(3) $\approx S^3/\{x \sim -x\}$:

Sedaj bomo grupo rotacij predstavili kot kvocient tridimenzionalne sfere pri identifikaciji antipodnih točk. Najprej se spomnimo, da lahko prostor $\mathbb{R}^4$ identificiramo s kvaternioni. Vsak $q \in \mathbb{R}^4$ lahko zapišemo v obliki

$$q = \alpha + xi + yj + zk = (\alpha, \vec{r}).$$

Vektorje v $\mathbb{R}^3$ pri tem zapisu identificiramo s kvaternioni, ki imajo skalarni del enak nič. Podobno kot pri kompleksnih številih imamo tudi pri kvaternionih konjugiranje

$$q^* = (\alpha, -\vec{r}),$$

množenje kvaternionov pa lahko strnemo v formulo

$$q_1 q_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2, \alpha_1\vec{r}_2 + \alpha_2\vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2).$$

Sfero S^3 bomo identificirali z enotskimi kvaternioni. Vsak $q \in S^3$ lahko potem zapišemo v obliki

$$q = \pm\left(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\vec{e}\right).$$

Kot $\phi \in [0, \pi]$ je pri tem enolično določen, predznak pred zgornjim oklepajem pa je določen s predznakom skalarnega dela kvaterniona q. Vektor $\vec{e}$ je enotski vektor v smeri vektorskega dela kvaterniona q. Kvocientna preslikava

$$p : S^3 \to \mathrm{SO}(3)$$

je sedaj definirana s predpisom

$$\pm\left(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\vec{e}\right) \mapsto R(\vec{e}, \phi).$$

Za rotiranje vektorjev s pomočjo kvaternionov lahko uporabimo formulo

$$R(\vec{e}, \phi) \cdot \vec{r} = q(0, \vec{r})q^*,$$

kjer je $q = \left(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2}\vec{e}\right)$. V našem primeru je $q = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right)$, od koder sledi

$$\begin{aligned}
R(\vec{e}, \phi) \cdot \vec{r} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right)(0, \vec{r})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}, (1, 1, 0)\right)(0, \vec{r})\left(\sqrt{2}, (-1, -1, 0)\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(-x - y, \left(\sqrt{2}x + z, \sqrt{2}y - z, \sqrt{2}z + y - x\right)\right)\left(\sqrt{2}, (-1, -1, 0)\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(0, \left(2x + 2y + 2\sqrt{2}z, 2x + 2y - 2\sqrt{2}z, -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y\right)\right), \\
&= \left(0, \frac{1}{2}\left(x + y + \sqrt{2}z, x + y - \sqrt{2}z, -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\right)\right).
\end{aligned}$$

Za konec bomo rotaciji za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$ okrog osi $\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ priredili še rotacijsko matriko. Najprej moramo izračunati, kako se zavrtijo vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$:

$$R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{i} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{j} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$R(\vec{e},\phi)\cdot\vec{k} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Od tod sledi, da rotaciji $R(\vec{e},\phi)$ ustreza rotacijska matrika

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Če imamo dano netrivialno rotacijsko matriko Q, pa lahko os in kot rotacije določimo po naslednjem postopku:

- Kot $\phi \in [0,\pi]$ dobimo iz formule $\cos\phi = \frac{\mathrm{sl}(Q)-1}{2}$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju $\vec{e}$ matrike Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$. Predznak določimo tako, da je baza $\{\vec{e}, \vec{r}, Q\vec{r}\}$ pozitivno orientirana za poljuben $\vec{r}$, ki ni vzporeden $\vec{e}$.

□

(2) Rotacija $Q(t) = Q_2(t)Q_1(t)$ je podana kot kompozitum dveh rotacij $Q_1(t) = R(\vec{i}, \omega t)$ in $Q_2(t) = R(\vec{k}, \Omega t)$. Izračunaj rotacijski vektor in vektor kotne hitrosti rotacije $Q(t)$.

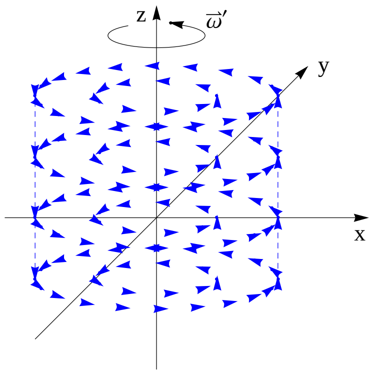
Rešitev: Vrtenje togega telesa si lahko matematično predstavljamo kot gladko pot v grupi SO(3) rotacijskih matrik. Odvod te poti v danem trenutku tako interpretiramo kot hitrost vrtenja telesa. Da bi ta pojem malce bolj razumeli, ga bomo poskusili opisati z nam bolj znanimi objekti.

Denimo, da imamo dva koordinatna sistema AKS in RKS s skupnim izhodiščem. Za sistem AKS predpostavimo, da miruje, sistem RKS pa naj se vrti skupaj s togim telesom. Za poljubno točko v prostoru potem velja naslednja zveza med njenimi koordinatami v AKS in v RKS

$$\vec{r}\,' = Q(t)\vec{r},$$

kjer je $Q(t)$ matrika, ki določa orientacijo RKS glede na AKS. Če si izberemo neko fiksno točko $\vec{r}$, nam ta predpis pove, kako se med vrtenjem telesa po prostoru premika točka, ki v RKS miruje v točki $\vec{r}$. Da bi si geometrično predstavljali vektor kotne hitrosti, moramo opisati hitrostno polje, ki ga na ta način ustvari množica vseh točk, ki mirujejo v RKS.

Poglejmo si najprej primer, ko je $Q(t) = R(\vec{k}, \omega t)$ enakomerna rotacija okoli navpične osi.



Točka $\vec{r} = (x, y, z)$ v tem primeru enakomerno s kotno hitrostjo ω kroži na višini z po krožnici s polmerom $\sqrt{x^2 + y^2}$ in s središčem na z-osi. Hitrostno polje, ki ga ustvari to vrtenje, lahko zapišemo z enačbo

$$\vec{v}'(\vec{r}') = \vec{\omega}' \times \vec{r}'.$$

Vidimo, da na osi rotacije (oziroma v smeri vektorja kotne hitrosti) ležijo natanko tiste točke, ki pri vrtenju mirujejo.

V primeru poljubne rotacije $Q = Q(t)$ dobimo na analogen način hitrostno polje, ki pa se spreminja v odvisnosti od časa. Izkaže pa se, da v vsakem trenutku obstaja neka os v prostoru, na kateri točke mirujejo. Tej osi rečemo trenutna os vrtenja. Če zamrznemo hitrostno polje v danem trenutku, bo izgledalo podobno kot na zgornji sliki, le da bo namesto osi z krožilo okoli trenutne osi vrtenja. Vektor kotne hitrosti je tedaj vektor v smeri trenutne osi vrtenja, ki je implicitno določen z enačbo $\vec{v}'(\vec{r}', t) = \vec{\omega}'(t) \times \vec{r}'$. Rotacijski vektor rotacije ustreza vektorju kotne hitrosti, le da ga gledamo v RKS.

Če imamo rotacijo podano v obliki $R(\vec{e}(t), \phi(t))$, lahko vektor kotne hitrosti in pa rotacijski vektor izračunamo s pomočjo formul:

$$\vec{\omega}'(t) = \dot{\phi}\vec{e} + \sin\phi\dot{\vec{e}} + (1 - \cos\phi)\vec{e} \times \dot{\vec{e}},$$
$$\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}\vec{e} + \sin\phi\dot{\vec{e}} - (1 - \cos\phi)\vec{e} \times \dot{\vec{e}}.$$

Rotacij praviloma nimamo predstavljenih v takšni obliki. Pogosto pa jih zapišemo kot kompozicije rotacij okoli fiksnih osi, kjer posamezni koti ustrezajo Eulerjevim kotom rotacije. V takih primerih najprej izračunamo vektor kotne hitrosti in pa rotacijski vektor za vsako rotacijo posebej in nato uporabimo formuli za kompozitum.

V našem primeru za rotaciji Q_1 in Q_2 velja:

$$\vec{\omega}'_1(t) = \omega\vec{i}, \quad \vec{\omega}'_2(t) = \Omega\vec{k},$$
$$\vec{\omega}_1(t) = \omega\vec{e}_1, \quad \vec{\omega}_2(t) = \Omega\vec{e}_3.$$

Za izračun kotne hitrosti kompozituma si sedaj pomagamo s formulama:

$$\vec{\omega}'_{21}(t) = \vec{\omega}'_2(t) + Q_2(t)\vec{\omega}'_1(t),$$
$$\vec{\omega}_{21}(t) = Q_1(t)^T\vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_1(t).$$

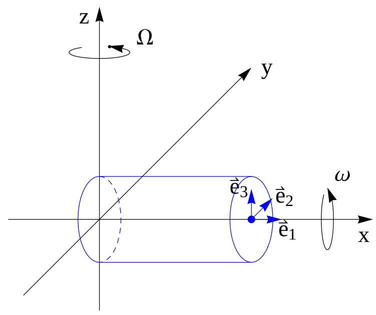
Matriki, ki ustrezata rotacijama $Q_1(t)$ in $Q_2(t)$, sta

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \\ 0 & \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

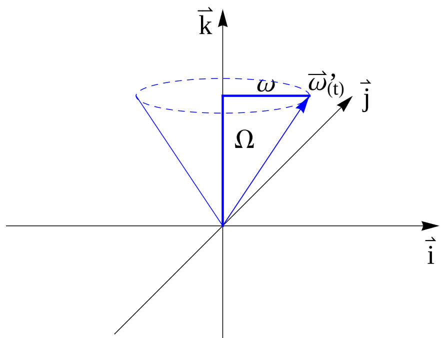
od koder sledi:

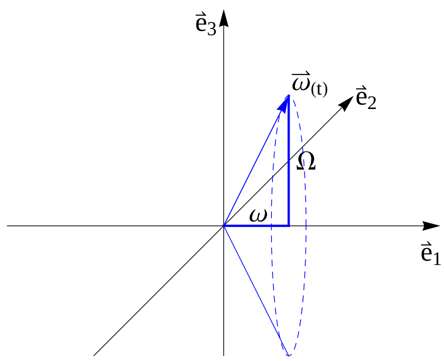
$$\vec{\omega}'_{21}(t) = \Omega\vec{k} + \omega(\cos\Omega t\vec{i} + \sin\Omega t\vec{j}),$$
$$\vec{\omega}_{21}(t) = \omega\vec{e}_1 + \Omega(\sin\omega t\vec{e}_2 + \cos\omega t\vec{e}_3).$$

Kot zgled naše rotacije si poglejmo valj, katerega os na začetku sovpada z x-osjo. Rotacija Q potem predstavlja vrtenje valja, ki sestoji iz vrtenja okoli osi valja s kotno hitrostjo ω in pa iz precesije osi valja okoli navpične osi s kotno hitrostjo Ω.



Vektor kotne hitrosti ima konstantno navpično komponento Ω in pa vodoravno komponento ω, ki precesira s kotno hitrostjo Ω okoli navpične osi. Če ga pogledamo v bazi, ki se vrti skupaj z valjem, pa dobimo rotacijski vektor, ki ima konstantno komponento ω v smeri osi valja. Komponenta, ki je pravokotna na os valja, pa ima velikost Ω in kroži okoli osi valja s kotno hitrostjo ω.





Opomba: Poglejmo si še, kako lahko kotno hitrost vrtenja interpretiramo po topološko. Vrtenje telesa si predstavljajmo kot gladko preslikavo

$$Q : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Odvod te preslikave $\dot{Q}(t)$ je potem neka matrika, ki leži v tangentnem prostoru $T_{Q(t)}\,\mathrm{SO}(3)$. Ker se tangentni prostori grupe $\mathrm{SO}(3)$ od točke do točke razlikujejo med sabo, tangentnih vektorjev v različnih točkah ne moremo neposredno primerjati med sabo. Lahko pa jih primerjamo posredno, tako da jih prenesemo v tangentni prostor $T_{\mathrm{I}}\,\mathrm{SO}(3)$ Liejeve grupe v točki $Q = \mathrm{I}$. Ta tangentni prostor sestoji iz vseh 3×3 antisimetričnih matrik, označimo pa ga z $\mathfrak{so}(3)$. Imamo naravni izomorfizem

$$\alpha : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3,$$

definiran s predpisom

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0. \end{bmatrix} \mapsto (w_1, w_2, w_3).$$

Ta izomorfizem je med drugim tudi izomorfizem Liejevih algeber $\alpha : (\mathfrak{so}(3), [\,]) \to (\mathbb{R}^3, \times)$.
Tangentna prostora $T_\mathrm{I}\,\mathrm{SO}(3)$ in $T_Q\,\mathrm{SO}(3)$ lahko primerjamo z matričnim množenjem. Za poljubno gladko pot $Q : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ je namreč

$$Q(t)^T\dot{Q}(t),\ \dot{Q}(t)Q(t)^T \in \mathfrak{so}(3).$$

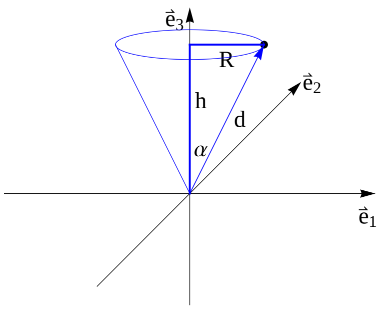
Ta primerjava nam omogoča, da hitrost rotacije enačimo z neko antisimetrično matriko. Če nadalje uporabimo še izomorfizem α, pa lahko hitrost rotacije enačimo kar z vektorji v $\mathbb{R}^3$. Izkaže se, da se ta identifikacija ujema z geometrično definicijo vektorja kotne hitrosti, ki smo jo uporabljali v nalogi

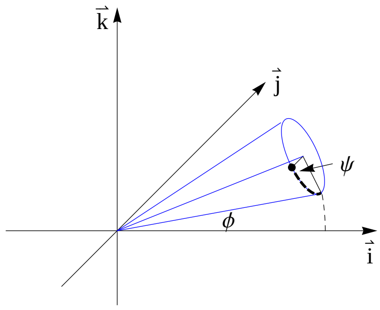
$$\vec{\omega}'(t) = \alpha\left(\dot{Q}(t)Q(t)^T\right),$$
$$\vec{\omega}(t) = \alpha\left(Q(t)^T\dot{Q}(t)\right).$$

□

(3) Stožec z višino h in s polmerom osnovne ploskve R se kotali po ravnini. Izračunaj rotacijski vektor in vektor kotne hitrosti kotaljenja stožca.

Rešitev: Relativni koordinatni sistem si bomo izbrali tako, da bo os stožca kazala v smeri vektorja $\vec{e}_3$. Položaj stožca med kotaljenjem bo nato natanko določen s kotoma ψ in ϕ, kjer nam parameter ψ določa kot zavrtitve stožca okoli lastne osi, parameter ϕ pa kot med dotikališčem stožca in ravnine ter abscisno osjo.





Položaj stožca med kotaljenjem glede na osnovni položaj lahko opišemo z rotacijo

$$Q(t) = Q_3(t)Q_2(t)Q_1(t),$$

kjer je:

$$Q_1(t) = R(\vec{k}, \psi(t)),$$
$$Q_2(t) = R\left(\vec{j}, \frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$
$$Q_3(t) = R(\vec{k}, \phi(t)).$$

Če bi stožec podrsaval po podlagi, bi bila parametra ϕ in ψ neodvisna, pogoj kotaljenja pa nam bo omogočil, da enega izrazimo z drugim. Matematično definiramo kotaljenje telesa po podlagi s pogojem, da točke na stičišču telesa in podlage mirujejo, oziroma, da je njihova hitrost enaka nič. V našem primeru nam da pogoj kotaljenja naslednjo vez

$$d\phi = -R\psi$$

med parametroma ϕ in ψ. Predznak je negativen, ker se pri kotaljenju v pozitivni smeri okoli navpične osi kot ψ zmanjšuje. Iz zveze $\frac{R}{d} = \sin\alpha$ od tod sledi

$$\psi = -\frac{1}{\sin\alpha}\phi.$$

Za izračun kotne hitrosti kotaljenja bomo najprej izračunali kotne hitrosti posameznih rotacij:

$$\vec{\omega}_1'(t) = \dot{\psi}\vec{k}, \quad \vec{\omega}_2'(t) = 0, \quad \vec{\omega}_3'(t) = \dot{\phi}\vec{k},$$
$$\vec{\omega}_1(t) = \dot{\psi}\vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_2(t) = 0, \quad \vec{\omega}_3(t) = \dot{\phi}\vec{e}_3.$$

Matrike teh rotacij pa so

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q_2(t) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}, Q_3(t) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

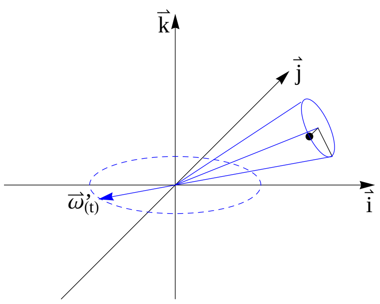
Kotno hitrost rotacije $Q(t)$ bomo izračunali v dveh korakih. Za rotacijo $Q_2(t)Q_1(t)$ velja:

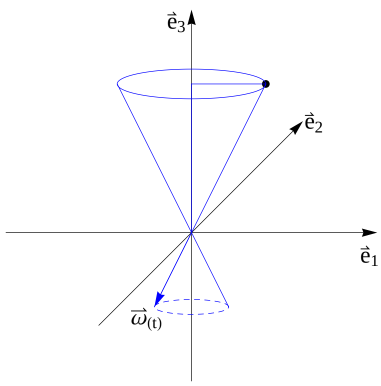
$$\vec{\omega}_{21}'(t) = \vec{\omega}_2'(t) + Q_2(t)\vec{\omega}_1'(t) = \dot{\psi}(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{k}),$$
$$\vec{\omega}_{21}(t) = Q_1(t)^T\vec{\omega}_2(t) + \vec{\omega}_1(t) = \dot{\psi}\vec{e}_3.$$

Nadalje pa je $Q(t) = Q_3(t)\,(Q_2(t)Q_1(t))$, od koder dobimo:

$$\vec{\omega}_{321}'(t) = \vec{\omega}_3'(t) + Q_3(t)\vec{\omega}_{21}'(t) = -\dot{\phi}\operatorname{ctg}\alpha(\cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}),$$
$$\vec{\omega}_{321}(t) = (Q_2Q_1(t))^T\,\vec{\omega}_3(t) + \vec{\omega}_{21}(t) = -\dot{\phi}\operatorname{ctg}\alpha\,(\cos\psi\sin\alpha\vec{e}_1 + \sin\psi\sin\alpha\vec{e}_2 + \cos\alpha\vec{e}_3)\,.$$

Vektor kotne hitrosti je v danem trenutku vzporeden dotikališču stožca in ravnine, vendar pa je zaradi kotaljenja stožca v pozitivni smeri obrnjen v nasprotno smer kot stožec. Lahko bi ga izračunali tudi direktno, saj iz pogoja kotaljenja takoj sledi, da je trenutna os vrtenja vzporedna z dotikališčem stožca in ravnine. Smer in velikost kotne hitrosti pa potem dobimo z izračunom hitrosti neke druge točke v stožcu. Rotacijski vektor pa v tem primeru kroži po plašču stožca, vendar z negativnim predznakom.





□