1. sklop dodatnih vaj iz Mehanike 1

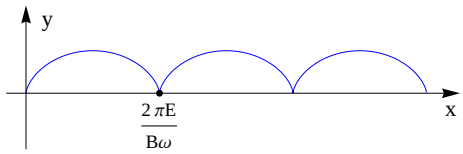
(1) Materialna točka z maso m in z električnim nabojem q se giblje pod vplivom Lorentzove sile

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Privzemimo, da sta $\vec{E} = (0, E, 0)$ in $\vec{B} = (0, 0, B)$ konstantni vektorski polji. Izračunaj trajektorijo točke, če ta na začetku miruje v koordinatnem izhodišču.

Rešitev: Če označimo $\omega = \frac{qB}{m}$, je:

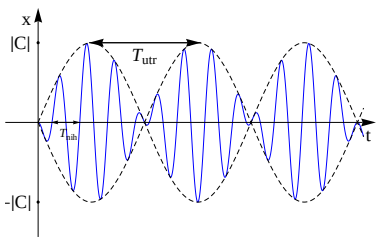
$$x(t) = \frac{E}{B}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right),$$
$$y(t) = \frac{E}{B\omega}\left(1 - \cos(\omega t)\right),$$
$$z(t) = 0.$$

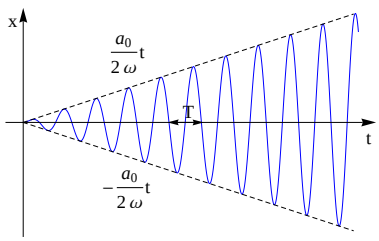


(2) Sistem, ki je sestavljen iz vzmeti s koeficientom k in uteži z maso m, vzbujamo s silo, ki je podana s predpisom $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Določi gibanje sistema, če na začetku sistem miruje v ravnovesni legi.

Rešitev: Če označimo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $a_0 = \frac{F_0}{m}$ in $C = -\frac{2a_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$, je:

$$\cdot\ \omega \neq \omega_0 \Longrightarrow x(t) = C \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot t\right),$$
$$\cdot\ \omega = \omega_0 \Longrightarrow x(t) = \frac{a_0}{2\omega} t \sin \omega t.$$





(3) Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2 \alpha x},$$

kjer sta V_0 in α pozitivni konstanti in $x \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$.

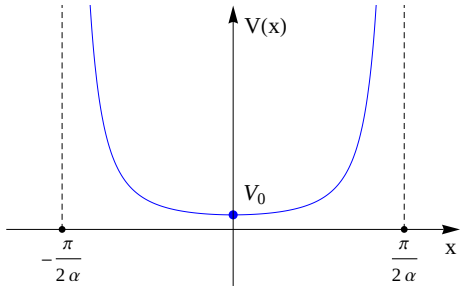
(a) Skiciraj graf potenciala in kvalitativno obravnavaj možne načine gibanja.

(b) Izračunaj periodo gibanja v primeru, ko je gibanje periodično.

Rešitev:

(a) Gibanje je možno za $E \geq V_0$. Pri vsaki energiji je omejeno in periodično. V točki $x = 0$ je stabilna ravnovesna lega.

(b) $T = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{2m}{E}}$.



(4) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je dan potencial $V_n(x) = |x|^n$. Izberimo $k > 1$ in označimo s T_n periodo gibanja pod vplivom potenciala V_n pri energiji $E_n = k^n$.

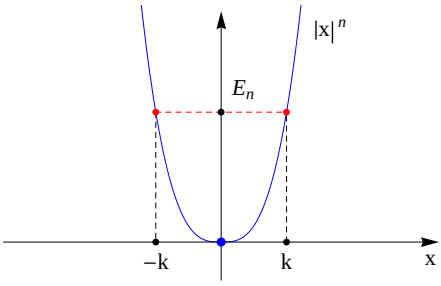
(a) Izračunaj T_n.

(b) Izračunaj limito $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

Rešitev:

(a) $T_n = \frac{2\sqrt{2m}}{nk^{\frac{n}{2}-1}} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$.



(5) Materialna točka z maso m se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = -\frac{k}{x},$$

kjer je $k > 0$. Izračunaj čas, ki ga potrebuje točka, da pride iz začetnega položaja $x = x_0$ v položaj $x = 0$.

Rešitev: $T = \frac{\pi x_0}{2}\sqrt{\frac{m x_0}{2k}}$.

(6) Materialna točka z maso m se giblje brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri po obroču $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}$. S koordinato ϕ označimo kot med točko in stabilno ravnovesno lego.

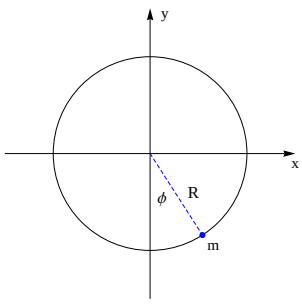
(a) Zapiši potencialno energijo točke in energijsko enačbo.

(b) Izračunaj frekvenco majhnih nihanj točke okoli ravnovesne lege.

Rešitev:

(a) $V(\phi) = -mgR\cos\phi$, $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - mgR\cos\phi = E$,

(b) $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$.



(7) Materialna točka z maso m zdrsne s temena cikloide in se nato giblje po njej brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri. Cikloida je podana s parametričnim predpisom

$$x(\phi) = r(\phi - \sin\phi),$$
$$y(\phi) = r(1 - \cos\phi),$$

za $\phi \in [0, 2\pi]$ in $r > 0$.

(a) Zapiši Newtonove enačbe.

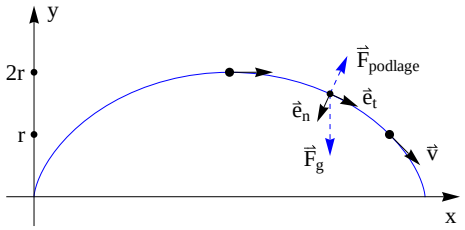
(b) Izračunaj, na kateri višini točka zapusti cikloido in vektor njene hitrosti v tistem trenutku.

Rešitev:

(a) Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

$$\vec{e}_t: \quad m\ddot{s} = -mg\frac{\sin\phi}{\sqrt{2 - 2\cos\phi}},$$
$$\vec{e}_n: \quad m\kappa\dot{s}^2 = \frac{mg(1 - \cos\phi)}{\sqrt{2 - 2\cos\phi}} + N.$$

(b) $y = r, \vec{v} = \sqrt{gr}(1, -1)$.



(8) Materialna točka z maso m se giblje brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri po polobroču $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2, y \geq 0\}$. Preko dveh vzmeti vzdolž polobroča je točka pripeta na obe krajišči polobroča. Vzmeti imata koeficient k in neraztegnjeno dolžino $d = \frac{R\pi}{2}$.

(a) Zapiši Newtonove enačbe.

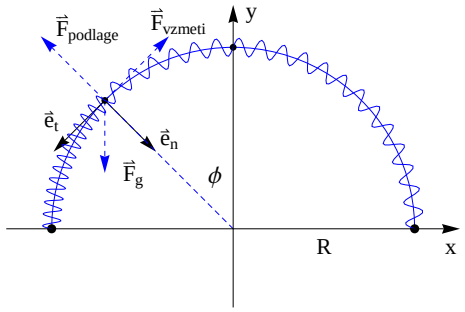
(b) Izračunaj, za katere vrednosti koeficienta k je točka na vrhu polobroča stabilna ravnovesna lega.

Rešitev:

(a) Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

$$\begin{aligned} \vec{e}_t : &\quad mR\ddot{\phi} = mg\sin\phi - 2kR\phi, \\ \vec{e}_n : &\quad mR\dot{\phi}^2 = mg\cos\phi + N. \end{aligned}$$

(b) $V(\phi) = mgR\cos\phi + kR^2\phi^2 \Longrightarrow k \geq \frac{mg}{2R}$.



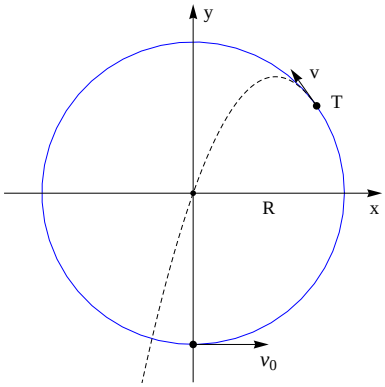
(9) Z dna vertikalno postavljenega obroča s polmerom R poženemo materialno točko s hitrostjo $v_0^2 = gR(2 + \sqrt{3})$. Točka ima maso m in se giblje po obroču brez trenja pod vplivom sile teže v navpični smeri.

(a) Izračunaj, kje točka zapusti obroč.

(b) Pokaži, da točka po zapustitvi obroča preleti središče obroča.

Rešitev:

(a) Točka zapusti obroč v $T\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}, \frac{R\sqrt{3}}{3}\right)$.



(10) Materialna točka se giblje po ravnini, tako da je njena radialna hitrost enaka dvojni obodni hitrosti, radialen pospešek pa je enak obodnemu pospešku. Točka se začne gibati na vodoravni razdalji r_0 od izhodišča in z začetno obodno hitrostjo c.

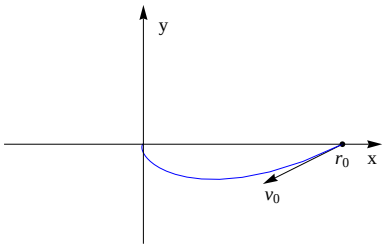
(a) Izračunaj trajektorijo točke.

(b) Izračunaj tirnico točke.

Rešitev:

(a) $r(\phi) = r_0 e^{2\phi}$,

(b) $\phi(t) = \ln\left(\dfrac{r_0}{r_0 - ct}\right)$, $r(t) = \dfrac{r_0^3}{(r_0 - ct)^2}$.



(11) Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po krivulji z enačbo $r(\phi) = a \sin 3\phi$, kjer je $a > 0$.

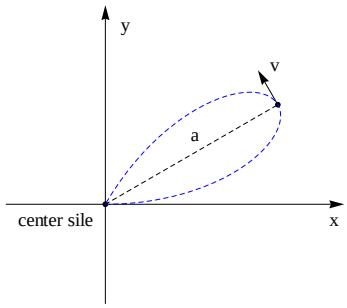
(a) Izračunaj centralno silo in efektivni potencial.

(b) Točka se giblje po krivulji, tako da ima v apocentru hitrost v. Koliko časa potrebuje, da pride iz apocentra v center sile?

Rešitev:

(a) $F(r) = -mC_0^2 \left(\dfrac{18a^2}{r^5} - \dfrac{8}{r^3}\right)$, $V_{\text{eff}}(r) = -mC_0^2 \left(\dfrac{9a^2}{2r^4} - \dfrac{4}{r^2}\right) + \dfrac{mC_0^2}{2r^2}$,

(b) $T = \dfrac{\pi a}{12v}$.



(12) Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po krivulji, ki je podana z enačbo $r(\phi) = r_0 \cos\phi$, kjer je $r_0 > 0$.

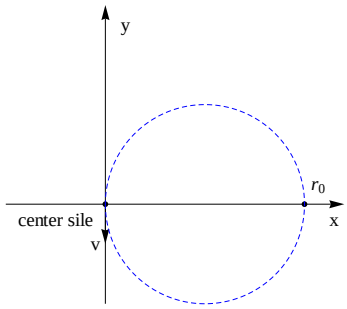
(a) Izračunaj centralno silo in zapiši efektivni potencial.

(b) Točka zapusti center sile in se začne gibati po krivulji z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0. Po kolikem času se vrne v center sile?

Rešitev:

(a) $F(r) = -\dfrac{2mC_0^2 r_0^2}{r^5}$, $V_{\text{eff}}(r) = -\dfrac{mC_0^2 r_0^2}{2r^4} + \dfrac{mC_0^2}{2r^2}$,

(b) $T = \dfrac{\pi r_0^2}{2C_0}$.



(13) Materialna točka z maso m se giblje v polju centralne sile po krivulji z enačbo $r(\phi) = a\cos 2\phi$, kjer je $a > 0$.

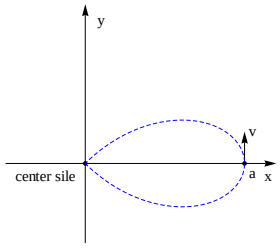
(a) Izračunaj centralno silo in efektivni potencial.

(b) Točka se začne gibati po krivulji iz apsidne razdalje $r = a$ z dano vrtilno količino l glede na center sile. Koliko časa potrebuje, da pride v center sile?

Rešitev:

(a) $F(r) = -mC_0^2\left(\dfrac{8a^2}{r^5} - \dfrac{3}{r^3}\right)$, $V_{\text{eff}}(r) = -mC_0^2\left(\dfrac{2a^2}{r^4} - \dfrac{3}{2r^2}\right) + \dfrac{mC_0^2}{2r^2}$,

(b) $T = \dfrac{ma^2\pi}{8l}$.



(14) Materialna točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile $\vec{F}(r) = -mC_0^2\left(\frac{1}{r^3} + \frac{2b^2}{r^5}\right)\vec{e_r}$. V začetnem trenutku se točka nahaja na položaju $\vec{r}(0) = (a, 0)$ in ima hitrost $\dot{\vec{r}}(0) = \left(\frac{C_0 b}{a^2}, \frac{C_0}{a}\right)$. Pri tem sta a in b pozitivni konstanti.

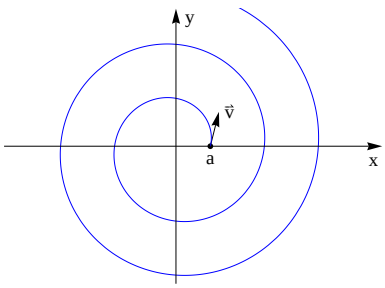
(a) Izračunaj tirnico materialne točke.

(b) Izračunaj trajektorijo materialne točke.

Rešitev:

(a) $r(\phi) = a + b\phi$,

(b) $\phi(t) = \dfrac{1}{b}\left(\sqrt[3]{3bC_0t + a^3} - a\right)$, $r(t) = \sqrt[3]{3bC_0t + a^3}$.



(15) Materialna točka z maso m se giblje z dano dvojno ploščinsko hitrostjo C_0 pod vplivom centralne sile $\vec{F}(r) = -\frac{mC_0^2}{r^3}\vec{e_r}$. V začetnem trenutku se točka nahaja na položaju $\vec{r}(0) = (r_0, 0)$ in ima radialno hitrost $v_r = -\frac{C_0}{r_0}$, kjer je $r_0 > 0$.

(a) Izračunaj tirnico materialne točke.

(b) Izračunaj trajektorijo materialne točke in ugotovi ob katerem času pride v center sile.

Rešitev:

(a) $r(\phi) = \dfrac{r_0}{\phi + 1}$,

(b) $\phi(t) = \dfrac{C_0 t}{r_0^2 - C_0 t}$, $r(t) = r_0 - \dfrac{C_0}{r_0} t$, $T = \dfrac{r_0^2}{C_0}$.