

## Vaje za 1. kolokvij iz mehanike

1. Točka z maso  $m$  se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = \frac{a \sin x + b}{\cos^2 x}, \quad b > a > 0.$$

- (a) Skiciraj graf potenciala in obravnavaj možne načine gibanj.  
(b) Izračunaj periodo gibanja v primeru, ko je gibanje omejeno.

2. Pod vplivom potenciala

$$V(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2}, \quad \text{za } x > 0,$$

kjer sta  $\alpha$  in  $\beta$  pozitivni konstanti, se premočrtno giblje materialna točka z maso  $m$ . Pokaži, da je gibanje pri vsaki dopustni energiji omejeno in da je perioda gibanja neodvisna od energije.

3. Točka z maso  $m$  se giblje premočrtno pod vplivom potenciala

$$V(x) = V_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x,$$

kjer sta  $V_0$  in  $\alpha$  pozitivni konstanti.

- (a) Skiciraj graf potenciala in obravnavaj možne načine gibanj.  
(b) Pokaži, da je gibanje pri vsaki dopustni energiji omejeno in nato izračunaj periodo gibanja.

4. Za vsako naravno število je dan potencial  $V_n(x) = |x|^n$ . Naj bo  $k$  poljubno pozitivno realno število.

- (a) Označimo s  $T_n$  periodo gibanja pod vplivom potenciala  $V_n$  pri energiji  $E_n = k^n$ . Izračunaj  $T_n$ .  
(b) Izračunaj limito  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ .

5. Materialna točka z maso  $m$  zdrsne s temena cikloide in se nato giblje po njej brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri. Cikloida je podana kot  $x(\phi) = r(\phi - \sin \phi)$  in  $y(\phi) = r(1 - \cos \phi)$  za  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Zapiši Newtonove enačbe in poišči kakšno ohranitveno količino.  
(b) Izračunaj, na kateri višini točka zapusti cikloido in vektor njene hitrosti v tistem trenutku.

6. Po krivulji z enačbo

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1, \\ 2 - x & , x > 1. \end{cases}$$

se brez trenja pod vplivom sile teže giblje točka z maso  $m$ .

- (a) Kje na krivulji moramo spustiti masno točko, da bo imela v točki  $(1, 1)$  hitrost  $v_0$ ?
  - (b) Kolikšna je v tedaj sila krivulje na točko v temenu parabole?
  - (c) Kje na premici pristane masna točka v tem primeru?
7. Po paraboli  $y = -x^2$  se brez trenja giblje masna točka z maso  $m$  pod vplivom sile teže.
- (a) Zapiši Newtonove gibalne enačbe.
  - (b) Z leve veje parabole se proti temenu giblje točka, tako da ima v temenu hitrost  $v_0$ . Za katere vrednosti  $v_0$  se bo točka v temenu odlepila od parabole?
8. Z dna vertikalno postavljenega obroča s polmerom  $R$  poženemo materialno točko s hitrostjo  $v_0^2 = gR(2 + \sqrt{3})$ . Točka ima maso  $m$  in se giblje po obroču brez trenja pod vplivom sile teže v navpični smeri.
- (a) Izračunaj, kje točka zapusti obroč.
  - (b) Pokaži, da točka po zapustitvi obroča preleti središče obroča.
9. Točka z maso  $m$  se giblje v polju centralne sile po krivulji, ki je podana z enačbo  $r(\phi) = r_0 \cos \phi$ .
- (a) Izračunaj centralno silo in zapiši efektivni potencial.
  - (b) Izračunaj čas, ki ga potrebuje točka, da pride iz apsidne razdalje  $r = r_0$  v center sile.
10. Točka z maso  $m$  se giblje v polju centralne sile po krivulji

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \text{sh}(\phi)}.$$

- (a) Izračunaj centralno silo.
  - (b) Določi efektivni potencial in skiciraj njegov graf.
11. Materialna točka z maso  $m$  se giblje v polju centralne sile po krivulji z enačbo  $r(\phi) = a \cos 2\phi$ , kjer je  $a > 0$ .
- (a) Izračunaj centralno silo in efektivni potencial.

- (b) Točka se začne gibati po krivulji iz apsidne razdalje  $r = a$  z dano vrtilno količino  $l$  glede na center sile. Koliko časa potrebuje, da pride v center sile?
12. V polju centralnih sil s potencialom  $V(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ , kjer sta  $\alpha$  in  $\beta$  pozitivni konstanti, se giblje masna točka z maso  $m$ .
- (a) Zapiši efektivni potencial in kvalitativno obravnavaj možne tire.  
 (b) Izračunaj tirnico s pomočjo Binetove enačbe.
13. Gibanje točke po ravnini je podano v polarnem koordinatnem sistemu z enačbama:
- $$r(t) = be^{kt}, \phi(t) = ct,$$
- kjer so  $b$ ,  $k$  in  $c$  pozitivne konstante.
- (a) Dokaži, da je kot med vektorjema pospeška in hitrosti konstanten.  
 (b) Določi razmerje med konstantama  $k$  in  $c$ , tako da bo kot enak  $\frac{\pi}{6}$ .
14. Materialna točka se giblje po ravnini, tako da je njena radialna hitrost enaka dvojni obodni hitrosti, radialen pospešek pa je enak obodnemu pospešku. Točka se začne gibati na vodoravni razdalji  $r_0$  od izhodišča in z začetno obodno hitrostjo  $c$ .
- (a) Izračunaj trajektorijo točke.  
 (b) Izračunaj tirnico točke.
15. Masna točka z maso  $m$  se giblje v polju centralne sile po krivulji dani z enačbo  $r(\phi) = b \cos^{-2}(\frac{\phi}{2})$ , kjer je  $b$  pozitivna konstanta. Izračunaj hitrost in pospešek točke, če je njena dvojna ploščinska hitrost enaka konstanti  $C_0$ .