2. sklop dodatnih vaj iz Mehanike 1

(1) Palica se vrti v navpični ravnini s konstantno kotno hitrostjo ω. Po palici se brez trenja giblje točka z maso m pod vplivom sile teže v navpični smeri.

(a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.

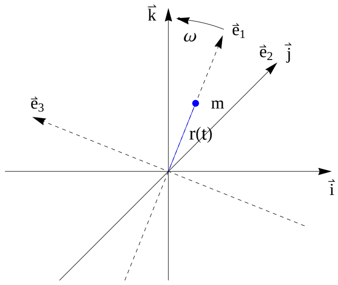
(b) Naj bo materialna točka ob začetnem trenutku na razdalji $r_0 = \frac{g}{2\omega^2}$ od izhodišča v vodoravni smeri in naj nima hitrosti v radialni smeri. Izračunaj, kako se giblje točka med vrtenjem palice.

Rešitev:

(a) Po komponentah se Newtonove enačbe glasijo:

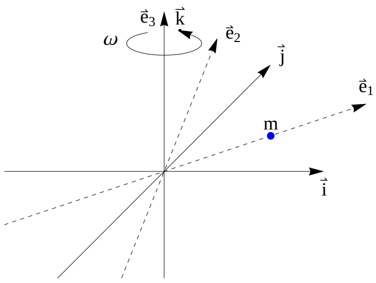
$$\begin{aligned} \vec{e}_1 : &\quad m\ddot{r} = m\omega^2 r - mg\sin\omega t, \\ \vec{e}_2 : &\quad F_2 = 0, \\ \vec{e}_3 : &\quad F_3 = mg\cos\omega t + 2m\omega\dot{r}. \end{aligned}$$

(b) $r(t) = r_0(e^{-\omega t} + \sin\omega t)$.



(2) Dolga palica se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti v vodoravni ravnini okoli izhodišča. Po njej se brez trenja giblje točka z maso m pod vplivom sile, ki je dana s potencialom $V(r) = -\frac{mk}{r}$, kjer je k pozitivna konstanta in r razdalja točke od izhodišča. Na palico postavimo točko v položaj $r = r_0$, tako da nima hitrosti v radialni smeri. Za katere vrednosti r_0 bo točka šla proti neskončnosti?

Rešitev: $r_0 > \sqrt[3]{\frac{k}{\omega^2}}$.



(3) Polobroč s polmerom R se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi, ki gre skozi njegovi krajišči. Po njem se brez trenja giblje točka z maso m, ki je preko dveh vzmeti vzdolž polobroča pripeta na obe njegovi krajišči. Vzmeti imata koeficient k in neraztegnjeno dolžino l.

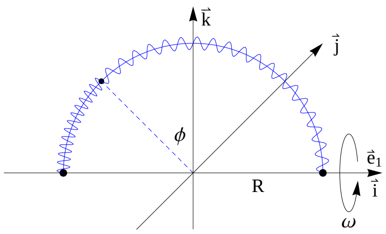
(a) Reduciraj gibanje na premočrtno gibanje polarnega kota.

(b) V odvisnosti od kotne hitrosti ω poišči ravnovesne lege in ugotovi, ali so stabilne.

Rešitev:

(a) $\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + kR^2\phi^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\cos^2\phi = E$,

(b) Ravnovesna lega je pri $\phi = 0$ in je za vsak ω stabilna.



(4) Obroč s polmerom R, ki leži v vodoravni ravnini, se enakomerno vrti s kotno hitrostjo ω okrog navpične osi, ki gre skozi točko na obodu obroča. Po obroču se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m.

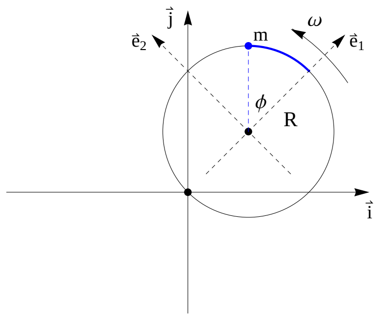
(a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.

(b) Denimo, da je v začetnem trenutku masna točka diametralno nasproti točke okrog katere se obroč vrti in da miruje glede na obroč. Pokaži, da točka med vrtenjem obroča miruje glede na obroč.

Rešitev:

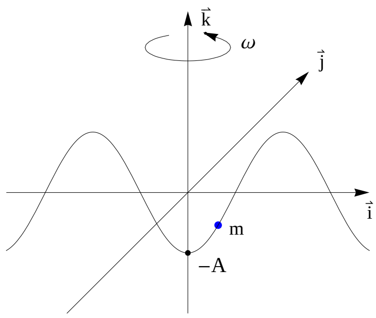
(a) Vektorska oblika Newtonovih enačb v RKS se glasi

$$m\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \vec{F}_g + \vec{F}_{\text{obroča}} + mR\omega\cos\phi(2\dot{\phi}+\omega)\,\vec{e}_1 + mR\omega\sin\phi(2\dot{\phi}+\omega)\,\vec{e}_2 + m\omega^2R\,\vec{e}_1.$$



(5) Krivulja, ki je v začetnem trenutku podana s sistemom enačb $z = -A\cos\alpha x$ in $y = 0$, kjer sta $A, \alpha > 0$, se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi z, po njej pa se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m. Za katere vrednosti ω je točka na krivulji, ki ustreza parametru $x = 0$, stabilna ravnovesna lega?

Rešitev: $\omega < \sqrt{gA\alpha^2}$.



(6) Izračunaj os in kot rotacije $Q \circ Q \circ Q$, kjer je Q podana z matriko

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $Q^3 = R\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1), \frac{\pi}{2}\right)$.

(7) Homogen stožec z maso m, polmerom R in višino $h = R$ se enakomerno kotali po podlagi, tako da je vrh stožca vpet v točki, ki je na višini R nad podlago. Kotna hitrost precesije stožca je ω.

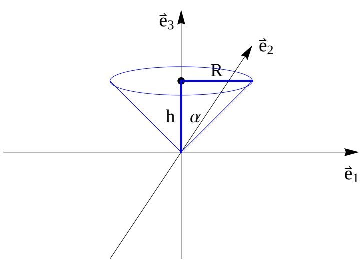
(a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor.

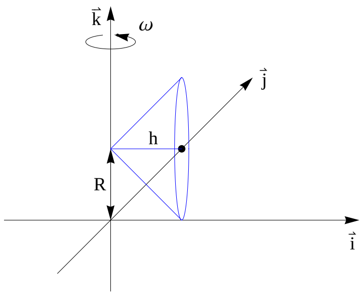
(b) Izračunaj kinetično energijo stožca.

Rešitev:

(a) $\vec{\omega}'(t) = -\omega\cos\omega t\,\vec{i} - \omega\sin\omega t\,\vec{j} + \omega\vec{k}$, $\vec{\omega}(t) = -\omega\cos\omega t\,\vec{e}_1 - \omega\sin\omega t\,\vec{e}_2 - \omega\vec{e}_3$.

(b) $T = \frac{21}{40}m\omega^2R^2$.





(8) Homogen disk z maso m in s polmerom R precesira okoli navpične osi s kotno hitrostjo Ω, okoli lastne osi pa se vrti s kotno hitrostjo ω. Težišče diska je na razdalji d od osi precesije.

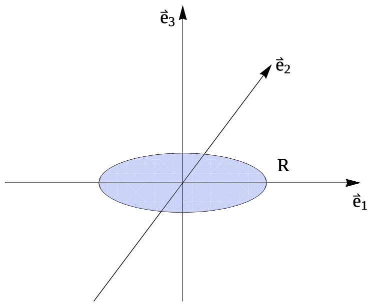
(a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor vrtenja.

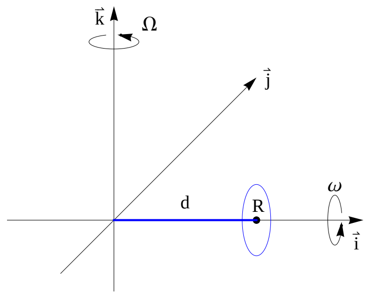
(b) Izračunaj kinetično energijo diska.

Rešitev:

(a) $\vec{\omega}'(t) = \omega \cos \Omega t\, \vec{i} + \omega \sin \Omega t\, \vec{j} + \Omega \vec{k}$, $\vec{\omega}(t) = -\Omega \cos \omega t\, \vec{e}_1 + \Omega \sin \omega t\, \vec{e}_2 + \omega \vec{e}_3$.

(b) $T = \frac{1}{2} m \left(d^2 \Omega^2 + \frac{1}{4} R^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} R^2 \omega^2 \right)$.





(9) Dana je homogena krogelna lupina $r^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ z maso m.

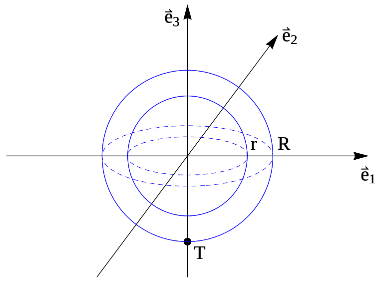
(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor lupine glede na točko na njenem zunanjem obodu.

(b) Lupino vpnemo v točki na njenem zunanjem obodu. Okoli katerih osi je možno enakomerno vrtenje lupine brez zunanjih navorov?

Rešitev:

(a) $$J_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} + mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} + mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \end{bmatrix}.$$

(b) Enakomerna rotacija je možna okoli normale na tangentno ravnino in okoli katerekoli osi, ki leži v tangentni ravnini.



(10) Homogena kocka z maso m in s stranico dolžine a se enakomerno vrti s kotno hitrostjo ω okoli ene od svojih stranic.

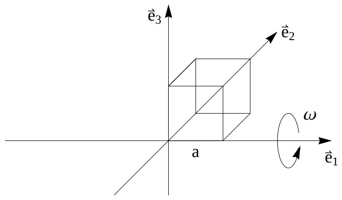
(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor kocke glede na oglišče.

(b) Izračunaj kot med vektorjema kotne hitrosti in vrtilne količine.

Rešitev:

(a) $J_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{bmatrix}$,

(b) $\phi = \arccos \dfrac{8}{\sqrt{82}}$.



(11) Homogen paraboloid z maso m in gostoto ρ, ki je omejen s ploskvama $z = 0$ in $z = h\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)$, kjer je $h = R$, se vrti okrog svoje osi simetrije. Od spodaj je podprt s horizontalno ravnino $z = 0$.

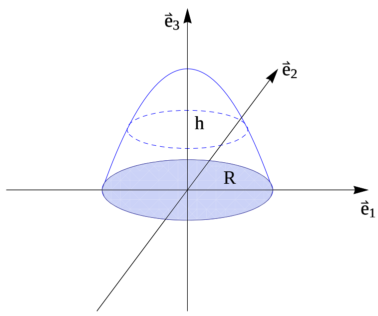
(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor telesa glede na središče osnovne ploskve.

(b) V kolikšnem času začetna kotna hitrost pade na polovično vrednost, če je koeficient trenja med podlago in ravno ploskvijo paraboloida enak k? Tu upoštevaj, da je gostota ploskovne sile konstantna in enaka teži paraboloida deljeno s ploščino osnovne ploskve.

Rešitev:

(a) $J_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mR^2 \end{bmatrix}$,

(b) $T = \dfrac{R\omega_0}{4gk}$.



(12) Homogena plošča v obliki elipse s polosema a in b ter z maso m se vrti okrog večje polosi. Ploščo zavrtimo, tako da ima na začetku kotno hitrost ω_0.

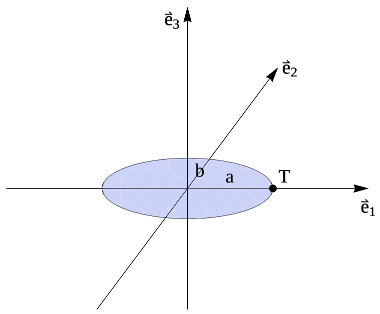
(a) Izračunaj vztrajnostni tenzor plošče glede na težišče in glede na teme elipse pri večji polosi.

(b) Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj, koliko časa je potrebno, da se kotna hitrost zmanjša na polovico prvotne, če vrtenje zaviramo z navorom, ki je sorazmeren kotni hitrosti (to je $N(\omega) = -k\omega$ za nek $k > 0$).

Rešitev:

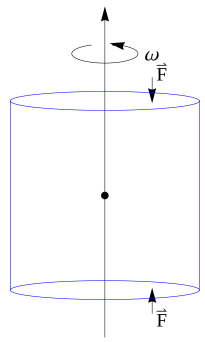
(a) $J_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$, $J_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}m(5a^2+b^2) \end{bmatrix}$,

(b) $T = \dfrac{\ln 2\, mb^2}{4k}$.



(13) Homogen valj z maso m, polmerom R in višino h zavrtimo okoli simetrijske osi s kotno hitrostjo ω_0. Valj stisnemo z vodoravnima hrapavima ploščama z nasprotno enakima silama velikosti F, ki sta enakomerno porazdeljeni po stičnih ploskvah. Zapiši Eulerjeve enačbe in izračunaj, čez koliko časa se valj ustavi, če je koeficient trenja med ploščama in valjem enak μ.

Rešitev: $T = \frac{3mR\omega_0}{8\mu F}$.



(14) Homogen disk z maso m in s polmerom R se giblje po premici. Na začetku ima njegovo težišče hitrost v_0, disk pa se vrti s kotno hitrostjo ω_0 okoli simetrijske osi. Disk nekaj časa drsi, nato pa se začne kotaliti. Koeficient trenja med diskom in podlago je enak k.

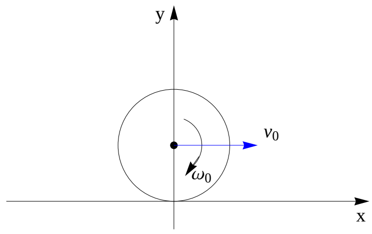
(a) Obravnavaj primer, ko je kotna hitrost večja od kotne hitrosti kotaljenja. Kdaj preide drsenje v kotaljenje?

(b) Obravnavaj primer, ko je kotna hitrost manjša od kotne hitrosti kotaljenja. Kolikšna mora biti začetna kotna hitrost diska, da se bo odkotalil v nasprotni smeri, kot pa je njegova začetna hitrost?

Rešitev:

(a) $T = \dfrac{\omega_0 R - v_0}{3kg}$,

(b) $\omega_0 < -\dfrac{2v_0}{R}$.



(15) Vodoravna plošča se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom a v vodoravni smeri, po njej pa se kotali krogla z maso m in s polmerom R. V začetnem trenutku ima težišče krogle hitrost v_0 relativno na ploščo v smeri pravokotno na gibanje plošče.

(a) Izračunaj silo kotaljenja.

(b) Izračunaj trajektorijo težišča krogle v koordinatnem sistemu, ki miruje glede na ploščo.

Rešitev:

(a) $\vec{F}_{\mathrm{kot}} = -\dfrac{2}{7} ma\, \vec{e}_1$,

(b) $\vec{r}_*(t) = \left(\dfrac{5}{14} at^2, v_0 t, R \right)$.