

Vaje za 2. kolokvij iz mehanike

1. Dolga palica se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti v vodoravni ravnini okoli izhodišča. Po njej se brez trenja giblje točka z maso m pod vplivom gravitacijske sile, ki je dana s potencialom $V(r) = -\frac{mk}{r}$. Tu je k pozitivna konstanta in r razdalja točke od izhodišča.
 - (a) Izberi si primeren relativni koordinatni sistem in zapiši zvezo med bazama relativnega in absolutnega koordinatnega sistema.
 - (b) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
 - (c) Na palico postavimo masno točko v položaj $r = r_0$, tako da nima hitrosti v radialni smeri. Za katere vrednosti r_0 bo masna točka šla proti neskončnosti?
2. Palica, ki je nagnjena za kot ϕ glede na navpično os, se vrti okoli nje s kotno hitrostjo $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$, kjer sta α in ω_0 konstanti. Po palici se pod vplivom sile teže brez trenja giblje točka z maso m .
 - (a) Izberi si primeren relativni koordinatni sistem in zapiši povezavo med absolutno in relativno bazo.
 - (b) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
 - (c) Točko postavimo na palico in opazujemo njeno gibanje. Ali lahko postavimo masno točko na palico, tako da bo mirovala? Kam na palico jo moramo postaviti v tem primeru?
3. Polobroč s polmerom R se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi, ki gre skozi njegovi krajišči. Po njem se brez trenja giblje točka z maso m , ki je preko dveh vzmeti vzdolž polobroča pripeta na obe njegovi krajišči. Vzmeti imata koeficient k in neraztegnjeno dolžino l .
 - (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu in reduciraj gibanje na premočrtno gibanje polarnega kota.
 - (b) V odvisnosti od kotne hitrosti ω poišči ravnovesne lege in ugotovi ali so stabilne.
4. Krivulja, dana s sistemom enačb $z = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, se enakomerno s kotno hitrostjo ω vrti okoli osi z . Po njej pa se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m .
 - (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
 - (b) V začetnem trenutku poženemo masno točko s hitrostjo v_0 iz izhodišča v smeri krivulje. Kako visoko se dvigne masna točka?

5. Parabola v prostoru, dana s sistemom enačb $z = x^2$, $y = 0$, se vrti enakomerno s kotno hitrostjo ω okoli osi z . Po njej se brez trenja in pod vplivom sile teže v navpični smeri giblje točka z maso m .
- (a) Zapiši Newtonove enačbe v relativnem koordinatnem sistemu.
- (b) Za katere vrednosti parametra ω je v temenu parabole stabilna ravnovesna lega?
6. Dani sta rotaciji $R(t) = R(\vec{e}(t), \phi)$ in $Q(t)$, kjer je ϕ konstanten kot, $\vec{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$ in

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj vektorja kotne hitrosti in rotacijski vektor rotacije $Q \circ R$.

7. Homogen stožec z maso m , polmerom R in višino h se enakomerno kotali po podlagi, tako da je vrh stožca vpet v točki, ki je na višini R nad podlago. Kotna hitrost precesije stožca je ω .
- (a) Izračunaj vektor kotne hitrosti in rotacijski vektor.
- (b) Izračunaj kinetično energijo stožca.
- (c) Izračunaj vrtilno količino stožca.
8. Krogla z maso m in polmerom R se s kotno hitrostjo ω vrti okoli lastne osi, ki gre skozi središče krogle in je nagnjena za kot α glede na vodoravno ravnino. Poleg tega krogla precesira okrog navpične osi s kotno hitrostjo Ω . Obe osi se sekata v točki na obodu krogle.
- (a) Izračunaj vektor kotne hitrosti vrtenja krogle.
- (b) Izračunaj kinetično energijo krogle v primeru, ko je $\alpha = 0$.
9. Označimo s T telo, ki ga dobimo tako, da zarotiramo ploskev

$$P = \{b \geq z \geq px^2, y = 0\}$$

okoli osi z . Izračunaj vztrajnostni tenzor telesa T glede na težišče.

10. Podana je polkrogla, dana s presekom polprostora $z \leq 0$ in krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
- (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor polkrogle glede na izhodišče.
- (b) S pomočjo Steinerjevega izreka izračunaj še vztrajnostni tenzor glede na težišče polkrogle.

- (c) Polkroglo vpnemo v težišču in jo zavrtimo tako, da ima na začetku kotno hitrost ω v smeri osi z . Izračunaj vrtilno količino, rotacijsko energijo in ugotovi, če se ohranja kotna hitrost, v primeru da ni zunanjih navorov, ki bi vplivali na vrtenje.
11. Homogena kocka z maso m in s stranico dolžine a se enakomerno vrtilno s kotno hitrostjo ω okoli ene od svojih stranic.
- (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor kocke glede na oglišče.
 (b) Poišči glavne osi vztrajnostnega tenzorja.
 (c) Izračunaj kot med vektorjema kotne hitrosti in vrtilne količine.
12. Homogena pravokotna plošča s stranicama dolžine a in b in z maso m se enakomerno vrtilno okoli diagonale s kotno hitrostjo ω .
- (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor plošče glede na težišče in glede na oglišče.
 (b) Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj, kakšen navor je potreben za vzdrževanje danega vrtenja.
13. Homogena plošča v obliki elipse s polosema a in b ter z maso m se vrtilno okrog večje polosi. Ploščo zavrtimo, tako da ima kotno hitrost ω_0 .
- (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor plošče glede na težišče in glede na teme elipse pri večji polosi.
 (b) Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe in izračunaj, koliko časa je potrebno, da se kotna hitrost zmanjša na polovico prvotne, če vrtenje zaviramo z navorom, ki je sorazmeren kotni hitrosti (to je $N(\omega) = -k\omega$ za nek $k > 0$).
14. Med dve vzporedni vodoravni steni na razdalji l je med točki A in B v navpični smeri postavljena os, ki se enakomerno vrtilno s kotno hitrostjo ω . Na središču osi je nanjo pod kotom α pripeta lahka palica dolžine $2d$, na vsakem koncu pa kroglica s polmerom r in maso m .
- (a) Izračunaj vztrajnostni tenzor sistema kroglic glede na težišče.
 (b) Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe.
 (c) Pri katerem kotu α bo potreben navor maksimalen?
15. Vodoravna plošča se giblje enakomerno pospešeno v smeri vzporedni s ploščo, po njej pa se kotali krogla z maso m in s polmerom R . V začetnem trenutku je krogla na sredini plošče, njeno težišče pa ima hitrost v_0 relativno na ploščo v smeri pravokotno na gibanje plošče.
- (a) Izračunaj silo kotaljenja.
 (b) Izračunaj trajektorijo težišča krogle v relativnem koordinatnem sistemu glede na ploščo.